



APOLLONII PERGÆI

CONICORVM

LIB. V. VI. VII.

&

ARCHIMEDIS

ASSVMPTORVM LIBER.

APOLLONII PERGÆI
CONICORVM LIB. V. VI. VII.

PARAPHRASTE

ABALPHATO ASPHAHANENSI

Nunc primùm editi.

ADDITVS IN CALCE

ARCHIMEDIS ASSVMPTORVM LIBER,

EX CODICIBVS ARABICIS M.SS.

SERENISSIMI

MAGNI DVCIS ETRVRIÆ

ABRAHAMVS ECCHELLENSIS MARONITA

In Alma Vrbe Linguar. Orient. Professor Latinos reddidit,

IO: ALFONSVS BORELLVS

In Pisana Academia Matheseos Professor curam in Geometricis versioni contulit, & notas vberiores in vniuersum opus adiecit.

AD SERENISSIMVM

COSMVM III.

ETRVRIÆ PRINCIPEM.





FLORENTIÆ,

Ex Typographia Iosephi Cocchini ad insigne Stellæ MDCLXI.

SVPERIORVM PERMISSV.



AD SERENISSIMVM

COSMVM TERTIVM

ETRVRIÆ PRINCIPEM.

IO: ALFONSVS BORELLIVS F.



HAVD puto, Serenissime Princeps, timorem cœlestis iræ, sed Amorem potius, & beneficentiam primùm in orbe Deos fecisse; nec alios ab initio habitos cum Prodico censeo, quàm res humano generi summopere vtiles, & salutares. Et sanè consentaneum est in primorum hominum mentibus, quibus reuelationis lumen non affulsit, excitatam fuisse notitiam cuiusdam naturæ, quæ esset mundi veluti Princeps, & Parens, quotiescumque non perfunctoriè attenderet animum præcipuè ad bonitatis affluentiam, mirabiliumque, & insignium vtilitatum comprehensionem, qua Solaris splendidissima machina lumine suo ordinatissimè circumacto cuncta viuificat, fouet, ac nutrit; mirarenturque liberalitatem Telluris, cùm tot opes, ac copias plantarum, fructuum, animalium è sinu suo veluti mater benigna mortalibus præbet. Hæc & similia dum prisci homines contemplarentur, fieri non potuit, quin tantorum munerum largitores grato affectu prosequerentur. Neque alia ratione cùm viri heroica virtute præditi artes, & inuenta præclara valdè vtilia ingeniosè iuxta, ac liberaliter mortalibus con-

tulissent, summa veneratione talem, ac tantam bonitatem susceperunt, & Diuinitatis honores eis designarunt, vt Cereri, Baccho, Herculi, Mercurio, & alijs. Horum autem illi præstantiora bona attulisse humano generi censendi sunt, non qui fragilem, & limo affixam nostram partem, sed qui animum Diuinæ auræ participem eruditione, ac sapientia perfecerunt, & ornarunt. Hinc artem, & facultatem illam tradentes, qua vasti maris planitiem intrepidè perambulare non dubitamus coactis ventis imperata facere, ibidemque versantes acu magnetica itinera ad vnguem mensuramus, & terræ plagas, & cœli, stellarumque loca, & situs medijs in tenebris constituti clarè conspicimus. Vel hinc qua pondera immensa pusillis nostris viribus tanta facilitate mouemus, vt terram vniuersam è suo loco transferre se posse non diffiteretur magnus ille Archimedes, si haberet, vbi pedem extra illam figeret. Aut qua naturæ miracula in elementis, plantis, animantibus perscrutamur. Quaue ex fragili vitro linceos oculos veluti efformantes adeò cœlo proximi efficimur, vt ferè summas mundi partes, & stellas innumeras hactenus inconspicuas contrectare videamur. Aut eam tandem doctrinam Astronomicam, qua in Cęlum transuolamus, duabus nimirum alis Geometriæ, & Arithmeticæ, quibus Diuinæ Sapientiæ thesauros contemplando, summa dulcedine in hac mortali vita, gloriæ, felicitatisque illius ineffabilis participes efficimur.

Sed quia felices admirabilium rerum inuentores vel fortunæ, vel temporum iniuria plerumque nequeunt sua studia, licet illustria, & salutaria posteritati transmit-

transmittere, ideo viris principibus singulari virtute præditis, sine quorum auctoritate, & munificentia bonæ illæ artes omnino depressæ, contemptæ, & squalidæ deperirent, dum eas diuino instinctu promouent, augent, atque in vitam reuocant, ne dum pares, sed maiores gratias ijs habendas prisci homines censuerunt, quàm inuentoribus ipsis, cùm ipsi bonis illis alioqui non duraturis genus hominum beauerint.

Atqui inter istos Heroas dignissimum sibi meritò locum vindicarunt Maiores tui, Princeps Serenissime, quibus gratitudinis perpetuam deberi memoriam eruditi omnes fatentur. Quippe postquam Barbarorum incursionibus Europa vniuersa, & Italia Princeps eius prouincia prisco nitore amisso, omni ornatu litterarũ, artium, bibliothecarum, lycęorum, imo humanitatis, & politiæ spoliata diù iacuisset, Diuino fauore primus omnium surrexit Magnus ille Cosmus Mediceus, qui viros doctrina eximios cum vniuersa supellectile Grecæ sapientiæ Constantinopolitani Imperij calamitatem fugientes eo affectu complexus est, vt omnium Musarum parens appellari deberet, qui ob liberalitatem plusquam regiam, & beneficentiam vbique terrarum effusam, atque ob alia heroica gesta Pater Patrię prius salutatus fuerat. In eius locum successit Laurentius nepos, qui non ferro, & cęde, sed ciuili prudentia, & alto consilio Patriam, & pene Europam moderatus est: nec modo Poëticis leporibus ornatus, sed profundissimæ Philosophiæ Platonicæ innutritus, eamdem doctrinam opera, & studio potissimum Marsilij Ficini è Gręco translatam illustratamque posteris transtulit. Bibliothecam insuper Laurentianam à maioribus inchoatam comparatis

vndique

vndique manuſcriptis codicibus ſummo impendio, ſummaque cura locupletauit. Iſq; filium reliquit Leonem X. Pont. Max., qui vniuerſi orbis viros eruditos dilexit, fouit, amplificauit: Bibliothecam Vaticanã mirificè inſtruxit: Vrbis Lyceum à fundamentis erexit, codicibus, & viris doctrina magnis ornauit, atq; priſca barbarie omnino deleta aureum litterarum ſæculum reſtituit. Sed Coſmus ille primus Magnus Dux Etruriæ mihi nunc non reticendus, qui præter præclara bellica, & politica facinora, quibus Etruſcum Imperium auxit, atque firmauit, promouendis diſciplinis ſedulò intentus Athenæum Piſanum, vt cum maximè reparauit, vt profeſſoribus diſciplinarum fama præſtantibus nobilitauit: Florentinam Academiam inſtituit, Pandectarum libros ad fidem egregij, & vetuſtiſsimi codicis manuſcripti ampliſsimè excudi iuſſit: tot inſignes Græci, Latini, Etruſci idiomatis ſcriptores vigilijs, & labore eruditiſsimorum virorum illuſtratos typis edendos curauit: Paulum Iouium cum primis, & Io: Baptiſtam Adrianum ad ſui temporis hiſtorias conſcribendas ampliſsimis oblatis præmijs perſuaſit. Virtutes, atque opera tam Magni Parentis imitatus eſt Franciſcus, qui in Imperio ſucceſsit, & antiquitatis ſtudio maximè delectatus, præclaras, atq; innumeras venerandæ vetuſtatis reliquias, lapides, gemmas, numiſmata collegit. Hunc excepit Ferdinandus primus verè litteratorũ Mecoenas, qui Bibliothecam codicibus Hæbreis, Chaldæis, Syriacis, Egyptijs, Perſis, & Arabicis (inter quos hi libri Apollonij, & Archimedis extant) feliciſsimè ditatam reliquit, atque eruditiſsimos viros Hieronymum Mercurialem, Petrum Angelum, Iacobum Mazzonum, Io:

Bapti-

Baptiſtam Raimundum, totq; alios largiſsimis ſtipen-pendijs euocauit, atq; aluit; Sacroſanctaq; Euangelia fidei propagandæ ſtudio imprimi, Euclidem quoque, Auicennam, Geographiam Nubienſem typis nitidiſ-ſimis Arabicè omnia edi curauit. Non abſimilis litte-rarum amore Coſmus Secundus, cuius nomen, ac glo-riam magnus ille Galilæus erga Principem de ſe opti-mè meritum gratiſsimus in cœlum vexit, ac inſculpſit;
„ Vir nempe (vt Gaſſendus ait) ſuper æthera notus; quo
„ alium non extulit ætas hæc noſtra glorioſiorem; quip-
„ pe tametſi orbis terrarum laudatis virorum illuſtrium
„ dictis, factiſq; circumſtrepit, horum tamen omnium
„ memoriam ſilentium altum breui inuoluet: nomen,
„ quod ille cœlo inſcripſit, donec cœleſtia curæ erunt,
„ apud homines perennabit. Tandem Ferdinandus Secundus ingenij perſpicacia mirabilis, maieſtate im-perij præclarus, virtutibus, & Philoſophia illuſtrior fe-liciter regnat: is eſt, cuius munificentia, ac fauore Eu-ropa vniuerſa in Etruſca hac regia (ne aulicum decus, aut cultum, nobilium obſequia, & famulitium, Muſæ-um ampliſsimum, ac ditiſsimum referam) eruditorum frequentiam philoſophantium, diſceptationes, ac per-petua exercitia literaria æſtimari, ac florere merito ſuſpicit, & veneratur; cum Muſæ reliquis in aulis tantũ non neglectæ huc ſe ſe recepiſſe veluti in ſedem ſuam videantur; hìc enim in delicijs habentur ſectio-nes anatomicæ, cœleſtes obſeruationes, chimica eſpe-rimenta, vniuerſęque naturalis philoſophiæ accurata inquiſitio. Vno verbo hinc credula philoſophia exu-lat; non hominum libri in pretio habentur, ſed Dei volumen, ſcilicet rerum natura veris, accuratiſq; expe-rimentis ſummo ſtudio indagatur, & colitur. Præcla-

ris

ris hisce studijs lactatus, & innutritus es, Princeps Serenissimè, tot tantorumq; heroum progenies, quorum virtutes incomparabiles,& egregia gesta consentaneũ est in te vno veluti foco speculi parabolici simul collecta, & vnita splendescere, vt totas vires suas summa virtus experiatur, atq; ineffabilem bonitatem, beneficentiæq; studium, virtutum, artium, scientiarum cultum à maioribus acceptum studiosè, & religiosè conserues, atq; ad posteros auctum transmittas.

Si igitur hominum genus natura dictante primum Deo Op. Max., & beneficentissimo gratias iustis honoribus, & memori mente persoluendas esse decreuit; atq; ne memoria beneficiorum deleretur templa, fana, festos dies, & ludos instituit. Secundo loco eosdem ferè honores Heroibus, ac Principibus statuit, nõ his qui armis, & cęde potentiam violenter sibi vindicarunt, sed qui præstantibus virtutibus ornati magna beneficia in homines contulerunt, sique eos non humanis, sed diuinis laudibus celebrari iussit, potiori iure tibi, Princeps Gloriosissimè, pręclarissimorũ heroum, ac virtutum hęredi plausus debitus, honores, laudes, & grati animi monumenta ab eruditis Europæ viris offeruntur. Quandoquidem magna,& certa illos spes tenet amplissimum patrimonium heroicarum virtutũ, quod Cosimus Pater Patriæ, Laurentius magnificentiæ exemplar, Leo sui sęculi felicitas, insequentesque generosissimi Principes, atq; Heroes de genere humano, & bonis litteris optimè meriti tibi reliquerunt non ad fastum, sed ad imitationem, & stimulum gloriæ, nec externè, sed in animo, & cordis sacrario piè a te, ac reuerenter curandum, seruandum,amplificandum ea pręcipuè qua polles pręclara indole, ingenijq; acumine,

mine, ac felicitate, amoreq; ſcientiarum, ac bonarum artium, quibus te Deus, & Natura indulgentiſsimè cumulauit. Hoc quidem ſummopere precatur, & vouet eruditorum Reſpublica, ò Princeps longe incomparabilis, idque vaticinatur ex hoc tuo pręclaro decore, & ſummæ bonitatis ſpecimine: Quippe, ò Principum decus, & ſtudioſorum delicium, perbellè docuiſti virtutis heroicę magis proprium eſſe benefacere, & alijs prodeſſe, quàm laudes meritas captare, & exigere; dum veluti epulo lautiſsimo in hac ſolemni pompa tuarum nuptiarum, ſcientiarum cultores donatos voluiſti; quid enim pretioſius, & magis expetitum veritatis ſtudioſis præbere poſſes, quàm Quintum, Sextum, & Septimum libros Conicorum Apollonij Pergæi hactenus deploratos, atq; lemmata Archimedis, quæ Sereniſsimus Ferdinandus Secundus inclytus, atque optimus parens tuus ex Arabico verti, & typis excudi ad communem reipublicæ litterariæ bonum iuſsit? Tanto ergo pro beneficio

— grates perſoluere dignas
— Non opis eſt noſtræ,
Numina tibi
— pręmia digna ferant, quę te tam lęta tulerunt
— ſęcula, qui tanti talem genuere parentes,

CAVE CHRISTIANE LECTOR.

ABalphatus Aſphahanenſis Apollonij Paraphraſtes religione Maumędanus fuit; quapropter aliquot locis more ſuę Gentis non modo Regi ſuo Abicaligiar Carſciaſeph nimium adulatur, verùm etiam impiè loquitur. Nihil tamen omiſsum eſt, vt antiquus Codex integrè, fideliterq; exhiberetur. Hęc eadem de Archimedis interprete dicta ſunto. De his te præmonitum volui, ne inter legendum piæ aures tuæ vel minimùm offenderentur.

Vale.



IN NOMINE DEI MISERICORDIS MISERATORIS.

PROOEMIVM

ABALPHATHI FILII MAHMVDI, FILII ALCASEMI, FILII ALPHADHALI ASPHAHANENSIS.

LAVS DEO VTRIVSQVE SECVLI DOMINO.





ATHEMATICA quamuis practica ſit ſcientia, ac diſciplina, cuius legibus, & præceptionibus diſponitur, atq; dirigitur intellectiua potentia ad abſolutam, perfectamque imaginum cognitionem, præſcindendo à materijs, qui eſt primus gradus aſcenſionis à ſenſibilibus ad intelligiqilia; nihilominus ſuarum claritate demonſtrationum, non ſolùm ab alijs differt ſcientijs verùm

** etiam

etiam longiſsimè ijs præſtat, atq; præcellit, eò quòd fæcium, ſordiumque dubitationum, & aliorum huiuſmodi generis accidentium expers omninò ſit, atq; libera. Ea autem propter ſe habet ad ſcientificam potentiam, quemadmodùm habent ſe limpidiſsima quæque orbi ſolis oppoſita ad viſiuam potentiam. Ex quo ad illam comparandam, conſequendamq; non excitatur intellectiua duntaxat vis, verùm etiam multùm exacuitur, atq; delectatur, ponderatis præſertim, expenſisq; illius demonſtrationibus, & certiſsima earum comprehenſa, & cognita veritate. Tunc quippè huius veritatis percepta animus odorationis ſuauitate, auidè, & ardentiùs appetit conſequi ea omnia, quæ illius ſuggerunt demonſtrationes, earumque potiri. Subindè verò procedere conatur vltrò ad vltimum finem, nempè ad proprietatum, & obiecti illius cognitionem, excelſitatem, atque præſtantiam comparandam, tandemque ad ea omnia, quæ ad ipſam ſpectant. Quod quidem luminis cùm ipſius affulſerit ſtudioſis, & quàm præcellens ſit, animaduerterint, omnes ſuos contulerunt conatus ad libros componendos, conſcribendoſq; de ipſius elementis, principijs, ac omnibus ijs, quę indè deriuantur, & eò ſpectant. Solidiora porrò profeſsionis huius fundamenta omnium primus iecit Euclides in eo libro, quem de elementis inſcripſit, in quo fundamentales continentur rationes linearum tam rectarum, quàm curuarum, nec non ſuperficierum prouenientium vel ex earum ſingulis vel ex omnibus ſimul ſumptis. Rationes prætereà habentur ſolidorum prouenientium, vel

ex

ex superficiebus rectilineis, qualia sunt habentia bases; vel ex curuis, qualia sunt sphœrica; vel ex hisce compositis, quales sunt superficies Cylindrorum, & Conorum. Verùm enim verò figuris ex segmentis superficierum planarum prouenientibus, & cuiuslibet etiam Solidorum Sphœricorum, Cylindricorum, atque Conicorum nullum hactenùs iactum erat fundamentum, aut præmissa elementa, vel fundamenta aliqua. Ex quo illi prisci librorum Scriptores aliquid de ijs innuebant duntaxat, & quidem leuiter. De Sphœricis autem aliquid ex eorum legebant proprietatibus; & passionibus; siue ex proprietatibus segmentorum indè prouenientium; vel figurarum in ea incidentium; vel ex accidentibus quibusdam ipsius Sphœræ, quæ ex eius procedunt motibus; vel quia se inuicem includunt, & componunt. Nam Sphœra aliqua opus illi erat ad Sphœræ vniuersalis cognitionem consequendam vna cum eius orbibus, ac motibus, & ad inuicem atque sua centra applicatione. Et id tandem, donec librum Almagesti composuit Ptolomæus, in quo ea omnia recondidit copiosè, quæ illi angustè, & leuiter hoc de argumento suis innuebant scriptis, tradens non solùm methodum, ac rationem eorum assequendi cognitionem, sed, & instrumentorum etiam vsum. Quod profectò iactum fuit tamquàm vniuersale quoddam fundamentum, ac principium ea omnia comprehendens, quæ ad Sphœrica pertinent; vndè hac in re satis abundè studiosorum siti, & desiderio consultum fuit. Porrò Appollonius professionē, & disciplinam hanc ad supremum per-

sectionis perduxit gradum, Conicorum componendo librum, qui Conicarum sectionum complectitur proprietates, quæ sublimiorem, eminentioremque disciplinæ huius sibi vindicant locum. Et sane tot propositionibus, totque figuris illum ditauit, vt admirabiles illæ nuncupari meruerint, eò quòd contineant lineas curuas, seu medias inter rectas, ac circulares sese inuicem secantes; adeoque miros quidem fundunt sensus, & proprietates. Quos quidem omnes libros, qui disciplinæ huius fundamenta sunt, ad Arabicam transtulere linguam illius studiosi. Quamuis autem liber iste Conicorum præstantissimus sit, tam ratione sui, quàm præclarissimi Auctoris, nihilominùs nimiam ob illius obscuritatem, difficultatesque obuiam occurrentes, ac profundissimos, quos continet sensus; tum etiam ob innumeras, & admirabiles figuras, & propositiones; tandemque ob temporis diuturnitatem, ingentesque perferendos labores ab interprete, qui cùm ex Græca transferat lingua, dudum neglectus fuit, ac penè etærnæ datus obliuioni, vt nemò hactenùs illum, vel Commentarijs illustrauerit, vel congesserit in ordinem, quamquàm summè sit necessarius, ac vtilissimas complectatur propositiones, & figuras. Quapropter diù sepultus, & ignotus iacuit, & penè ad defectum vsque, ac interitum, cùm apud Disciplinæ studiosos, tum etiam ipsos professores, & fragmenta ex illo circumferebantur aliqua, & ea sanè faciliora, quia obscuriora euitabant omnes, atque declinabant; vno verbo integrum hactenùs viderat nemo. Hinc mihi famulo

visum

viſum eſt, me Reipublicæ Literariæ gratam rem facturum, ſi eum in integrum reſtituam, ac in vnum congeram volumen, vt ita redactus facilis ſit portatu, ſub omnium verſetur oculis, omnium teratur manibus, & ad reliqua facilior reddatur aditus.* Quem etiam librum comparare ſtudui Bibliothecæ domini noſtri Regis præſtantiſsimi, munificentiſsimi, doctiſsimi, iuſtiſsimi, victoris, triumphatoris, Fidei defenſoris, celſitudinis Monarcharum, gloriationis ſui generis, gloriæ religionis, ſolis Regum, Abicaligiar Carſciaſeph Filij Ali, Filij Phrami, Filij Haſami, Principis Fidelium, quem incolumem, ac ſoſpitem ſeruet Deus, eiuſque deprimat hoſtes, & proterat oſores. Nunc autem aliquid de ordine, & rerum diſpoſitione, ac conciſa breuitate dicendum nobis ſupereſt. Nam rerum ordo, & accommodata diſpoſitio id intelligentiæ afferunt auxilij, quod in ſcientijs comparandis luculentiſsimæ demonſtrationes; conciſa verò breuitas, ac ſuis terminis neceſſarijs expedita, & ritè diſpoſita, eandem penè proportionem habet ad intelligentiam, ac cauſa ad cauſatum. Ea autem propter ordinis conſeruatrix virtus venatio dici ſolita eſt, & ſatis quidem appoſitè, & eleganter. Nam concepti ſenſus, & in mente comparati, ſi intra ordinis cancellos includantur, ſingulos ſuis diſpenſare momentis procliuè poterit conſeruatrix rerum illa virtus. Simillimi, alioquin erunt feris per vaſtas vagantibus ſolitudines, ac nullo coërcitis vallo, quorum imagines, & motus ita ſeſe offerunt conſpicienti, & contemplanti, vt nullo negotio eas

** Impiè adulatur Regi ſuo Paraphraſtes Arabicus.*

capere,

capere, & aucupari ſe poſſe arbitretur, at cum id præſtare tentat, ſtatim dilabuntur, atque euaneſcunt. Ea planè ratione termini rerum ſingulos in mente conceptos ſenſus deſignantes, niſi ſuo coërceantur ordine dilabuntur, & euaneſcunt; præcipuè cùm modò hanc, modò illam fundant ſignificationem, cùm iuxta labentis temporis varietatem, tùm diuerſitatem regionum, & prouinciarum, vt non eadem vbique, & ſemper ſit par ratio, licet ijdem in anima maneant habitus. Ex quo palam, & planè relinquitur, quòd acquiſiti illi termini non inhæreant, quemadmodùm ſubſiſtenti eſſentiales inhærent differentiæ; neque etiam quemadmobùm proprietates neceſſariò conſequentes ſuo inhærent ſubiecto; ſed ea inhærent ratione, quá accidentia difficilè, ac tardè amouibilia. Quandoquidem termini eiuſmodi vocabula ſunt quædam rebus impoſita, & applicata ad ſenſus commodè eliciendos, atque eruendos. Quod autem vel diuino factitatum eſt inſtinctu, vel Prophetica inſpiratione edoctum, ſicut indicat nobis Altiſsimus Deus dicens: *(in Alcorano) & docuit Adamum cuncta nomina; vel iudicio, & calculo ſapientum virorum, quemadmodùm præſtitiſſe legimus primos illos artium inuentores. & ſcientiarum; vel magna aliqua neceſſitas hominum coëgit vulgus ad eiuſmodi excogitandos terminos, rebuſque imponendos, ac tranſlatione quadam vocabula mutuanda, & ad alias, atque alias res transferenda, ex quo ſynonymorum ea enata eſt copia. Nec vllus profectò ſapientum, qui has profeſsi ſunt Diſciplinas, aut qui ipſorum

*Inſulsè ex Alcorano profert, quæ ſunt in Sacra Geneſi.

ſorum ſecuti ſunt veſtigia, hanc imponendorum terminorum rationem aſpernatus ſubindè eſt, aut ab illa abhorruit; quinimò acceptiſsima ſemper omnibus fuit, vt quæ maximum rerum intelligentiæ ſplendorem affert, & claritatem. Eandem igitur hanc ob cauſam in colligendis, digerendiſque hiſce famulus libris, antiquorum ſapientum, & artium profeſſorum, inuentorumque inſiſtens veſtigijs, terminos, & vocabula ſingulis rebus imponere, & earum vim breui declarare definitione cenſuit, vt ita ſuis coërcita omnia limitibus nequeant in varias partes, & ſenſus diffluere, ad conciliandam lectori inter legendum hos Apollonij libros eam, quæ fieri poteſt, facilitatem. Innui præterea eandem etiam ob cauſam obſcurioribus in locis expoſitionem aliquam, ne vlla ſubindè relinqueretur difficultas ad mentem Auctoris cumulatè aſſequendam.

Tandem lectorem meum enixè rogo, vt excuſatum me habeat, ſi mendum aliquod, aut erratum meam ſubterfugerit diligentiam. Interea Deum ſupplíciter deprecor Altiſsimum, vt nos ad ea, quæ vtiliora nobis ſunt, demúm perducat.



Ne vacaret pagina ipsiusmet Apollonij Pergæi ex Epistola ad Eudemum Argumenta in quatuor Conicorum libros posteriores, qui Græcâ linguâ iniuria temporum perierunt, hic apponuntur, quorum tres ex Arabicis M.SS. nunc exhibentur.

Reliqui autem quatuor libri ad abundatiorem ſcientiam pertinent. Quintus de Minimis, & Maximis magna ex parte agit. Sextus de Æqualibus, & Similibus coni ſectionibus. Septimus continet Theoremata quæ determinandi vim habent. Octauus Problemata conica determinata.

Hæc eadem Pappus Alexandrinus lib. 7. Mathemat. Collect., atq; Eutocius in Commentar. ad Apollonium.





ABRAHAMI ECCHELLENSIS

IN LATINAM EX ARABICIS

Librorum Apollonij Pergæi versionem

PRAEFATIO.





POLLONIVS Pergæus vetustissimus, ac magni nominis Græcus auctor otto de Sectionibus Conicis conscripsit libros. Horum priores quatuor hactenus omnium teruntur manibus; posteriores verò, nescio quo fato, & rerum vicissitudine sunt amissi, ac non sine magno literatorum animi mœrore iamdudum deplorati, & nusquam perdiligenter non quæsiti ab ijs præsertim, qui Geometriæ, & Matheseos operam nauant studijs, sed frustra diu. Tandem deprehensum est, hos, quemadmodum, & reliquam penè Grecæ sapientiæ supellectilem ad Arabum migrasse scholas, ibique Arabicè conuersos, & Arabicis indutos ornamentis, in illius gentis tamquam extorres, & inquilinos latitasse Bibliothecis. Quamobrem eorum miserti vicem Serenissimi Ma-

gni Etruriæ Duces, inde magno soluto pretio redemerunt, ipsorumque tam præclara opera quasi iure postliminij vindicarunt, ac demum patrio solo reddiderunt. Attamen sat non fuit, aut visum est summis istis Principibus Apollonium in libertatem asseruisse, & ex Barbarorum eripuisse manibus, ac in celeberrrima totius Europæ Auorum reposuisse Biblioteca; sed omnem nauarunt operam, & studium, vt Latinâ etiam donati linguâ in literatorum gratiam publici iuris fierent. * Ea propter verè Magnus ille in omnibus Ferdinandus primus celeberrimam eam erexit Typographiam è nomine gentilitio Serenissimæ familiæ *Mediceam* nuncupatam; cui nullam similem, aut parem vidit Christianus Orbis, aut visurus vnquàm est; siue characterum, præsertim Arabicorum, spectes copiam, siue varietatem, siue nitorem, siue elegantiam. Dictis hisce profectò nostris spectatissimam, ac manifestissimam fidem faciunt Sacrosanti Euangeliorum libri, Auicennæ, Euclidis, aliaque Arabica opera ijs edita typis, quæ omnibus Orientis gentibus admirationi sunt, atque adeo auidissimè expetuntur, ac magno comparantur pretio. Sed hæc non typis duntaxat excudi iussit munificentissimus Princeps, verùm etiam viros linguarum peritissimos ingenti conduxit stipendio, qui Arabicorũ Codicum vacarent versionibus. Hos autem inter principem obtinebat locum Ioannes Baptista Raimundus vir, & scientiarum cognitione, & linguarum peritia omnium ore celebratissimus. Is autem, & scriptis literis, & familiaribus cum amicis colloquijs Apollonij librorum versionem sæpenumerò pollicitus est. Imò erant, qui libris editis versionem iam à Raimundo confectam, & perfectam esse, in vulgus iactarent. Verùm cum nunquam visa fuerit eiusmodi versio, neque inter ipsius scripta reperta, neque in Aduersarijs notata, aut catalogo ipsius librorum adscripta, quæ omnia religiosè hactenùs conseruantur, hoc vnum credendum superest, eam votis solùm susceptam, & cogitatione delineatam fuisse; rem autem, aut quòd per otium ipsi non licuit, aut ob Codicis lectionem, & scripturæ difficultatem, quæ maxima est, vel ob orationis abstrusæ, & sermonis ancipitem, ac multiplicem verborum potestatem, vel tandem aliquam aliam ob causam, quàm, conijcere difficile est, perficere non potuisse.

* *Fallitur C.V?.Ger. Io: Vossius hoc tribuens Sixto V. P. M. C. 17. 29. de scient. Mathemat.*

Nihilo

Nihilo tamen minùs Magni Principis, Magni Filij, Magni Nepotes aut ab incœptis destiterunt, aut generosissimi animi dudum conceptum studium remiserunt. Quamobrem ante biennium scriptis à Serenissimo Principe Leopoldo literis officij plenis, & humanitate, tam proprio, quàm Magni Ferdinandi II. fratris nomine, imposita mihi fuit hæc prouincia optatæ diu, & penè desperatæ versionis. Quo sanè, vt ingenuè fatear, nihil iucundius, nihil carius, nihil antiquius accidere mihi poterat; quòd hac data occasione, aliquam grati animi significationem exhibere me posse putabam Serenissimo illi Principi, cuius amplissima in me beneficia sum expertus. Memini profectò, nec ex animo meo excidet, imo clauo fixum trabali manet, quanta in me contulit Magnus Ferdinandus Secundus ornamenta, quanta in me vsus est liberalitate, & beneficentia, non tantùm dum fortuna mihi arridebat, non solùm dum res succedebant prosperè, non modò dum ad illum ab Amiro Fachraddino missus singulari felicitate fruebar, sed etiam in naufragio, & iactura illa barbarica, in Carrellina coniuratione, & proditione, in aduersissima fortuna. Sed hæc omnia magis à me exprimi possunt profundissimo silentio, quàm verborum, copia, aut oratione altius exaggerata. Verùm enim verò dum arbitrabar, mirificam nactum me esse opportunitatem gratificandi Principi de me optimè merito, & exhibendi aliquod grati animi signum, penè concepta excidi spe. Nam aperto Apollonij Codice, & coniectis in eum oculis duæ primo ferè intuitu sese mihi obtulerunt difficultates, quas à me neque superari, neque vinci posse prorsùs existimaui. Hinc summus, & abstrusus pudor, hinc plurimus sudor ingenuè omnia fateor. Et eò magis intimis animi sensibus angebar, quod ea versio non in secessu aliquo fiebat, & remotis arbitris, vbi aciem mentis abducere, difficultates commodè expendere, animoque intento, & libero lustrare quæ in rem essent, ac per otium possem, sed præsentibus grauissimis viris, & quidem, ex tempore, & nulla data præmeditandi facultate, interpretationem facere compellebar. Ea fortè illorũ præclarissimorũ virorũ de me erat opinio, & existimatio, quàm tamen parum abfuit, quin penitus perdidissem, cùm vix, & ne vix quidem scripturam illam legere pos-

ſem, quæ prima erat difficultas. Nam puncta aberant diacritica imprimis (de punctis vocalibus hic non loquimur, nec eorũ inter legendum à peritis linguæ habetur ratio, aut negotium aliquod faceſſunt), nempè ea, quæ formam dant literis, literaſque conſtituunt, & ſine quibus literæ ſunt pura, ac nuda materia omni ſpoliatæ forma. Quid autem ſit materia omni ſpoliata forma, neque ipſi ſciunt Philoſophi, quorum id ſcire intereſt. Eodem prorſus ſe habent modo Arabum literæ, ſeu potiùs literarum ductus, & lineæ diacriticis hiſce carentes punctis. Eadem enim figura, ſeu linea, exempli gratia, ſi vnum ei ſuperponitur punctum erit N. ſi verò ſupponatur, B. ſi duo ſuperponuntur, T. ſi tria Th. ſi duo ſupponantur, I. & ſic de cæteris ferè omnibus arguendum eſt. Si quis autem percontabitur, quid erit illa figura, & linea, ſi nullum adſit punctum? reſpondetur materia ſine forma, & quid ſit prorsùs ignoratur. Augebant etiam lectionis difficultatem ipſæ literarum figuræ, quæ ita raptim, & curſim, licet elegantiſſimè, ductæ erant, vt vix ab inuicem quandoque, & identim diſtinguerentur. Hæc autem difficultas terruit quidem primo aſpectu ſed breui, & citius quàm credebam, ſuperata fuit, tum ſtudio, & diligentia, tum experientia, quàm ab ipſa incunte ætate ex lectione eiuſmodi ſcriptorum generis comparauimus.

Altera difficultas, quæ ſe nobis obtulerat, maioris quidem erat ponderis, & momenti; verſabatur quippè circa diſciplinæ vocabulorum intelligentiam, & notionem, quorum ignari eramus, & penitùs ieiuni. At hanc quoque difficultatem facili negotio ſuperauimus ope, & opera Clariſſimi, atque Doctiſſimi Viri D. Ioannis Alphonſi Borelli Matheſeos in Piſana Academia profeſſoris celeberrimi, qui, & verſionem ipſam promouerat apud Sereniſſimos Principes, & Codicem comportauerat idem Romam, ac perpetuus mihi aderat Dux, & Magiſter. Et ita ſanè ea omnia, quæ ad Diſciplinæ, eiuſque vocabulorum notionem pertinebant, clarè, dilucidè, & explicatè ordine inſinuauit, vt breui meis auditoribus Matheſeos profeſſor viderer. Porrò quod hac in re magis mirandum eſt, nec ſilentio prætereundum, ea erat Viro illi Doctiſſimo ſingularis ingenij perſpicacitas, vt ſæpe in abſtruſis quibusdam locis, non ex in-

tegris,

tegris, inquam, præmissis, sed ex vnica dictione totam illationem inde colligeret, non sensu, sed totidem penè verbis, ac si Arabica legeret verba, & linguæ veteranus esset professor. Proindè verius ipsi, quàm mihi adscribenda est hæc versio, longè tamen absit omnis adulatio, & animi propensio in virum amicissimum. Hac mutua contentione, & interpretandi, & vertendi trium Mensium spatio versio nostra confecta, & absoluta est, in qua horis tantummodò matutinis propter nimios calores æstiuos consumpsimus. Et hæc de ratione versionis posteriorum librorum Apollonij, & methodo satis dicta sint. Nunc de ipso Apollonio, eiusque librorum Arabica versione, & illius auctoribus nonnihil dicere, par, & consentaneum est.

Apollonium sub Achaz Filio Ioatham regis Iuda post Thaletem Milesium Floruisse, Arabes perhibent Scriptores. Sic enim lib. 3. Chronicorum in Achaz scriptum reliquit Gregorius Barhebræus: *Post Thaletem celebris fuit in Geometricis præcipuè disciplinis Apollonius Naggiar.* (idest faber lignarius) *Is composuit Tractatum de scientia Conicor. nempè de lineis, quæ neque rectæ sunt, neque arcuatæ, seu curuæ, sed inclinatæ.* Notandum hìc est vocem *Naggiar*, quæ Apollonio tribuitur, vt cognomen, & nos *fabrum lignarium* vertimus, poni (vt opinor) pro *Geometra*, & id fortè exindè, quòd instrumenta, quibus vtebantur Geometræ ex lignis olim conficiebantur. Quod, & indè conijcio, quia hoc idem vocabulum Euclidi quoque tribuitur apud eundem Gregorium sic de illo scribentem. *At Euclides Naggiar ex Vrbe Tyro erat.*

De versione autem librorum Apollonij in Arabicam linguam ita statim subdit mox laudatus Gregorius: *Ex his autem versi sunt in Arabicam linguam tempore Almamuni septem libri, eius tamen præfatio indicat, octo fuisse libros; qui quidem Tractatus cum alio Tractatu eiusdē Apollonij causam dedere Euclidi suorum componendorum librorū longum post tempus.* In his longè videtur discrepare Gregorius à communi Chronologorum sententia, & opinione, qui Apollonium Floruisse scribunt anno periodi Iulianę 4474. idest annis ante Christum Dominum 240. adeoque multò iunior est, quàm facit illum Gregorius. Discrepat præterea ab ijsdem Chronologis in ætate Euclidis, quem Apollonio iuniorem agnoscit, vbi

vbi illi eum collocant in anno periodi Iulianæ 4430. ideſt ante Chriſtum Dominum annis 284. iuxta quàm opinionem Apollonius iunior erit Euclide annis 44.

Almamun autem ſub quo facta eſt librorum Apollonij verſio in Arabicam linguam ex laudato Gregorio Chalipha ſecundò ſalutatus eſt An. Heg. 203. ex omnium ſcriptorum ſententia, qui annus ex Tabula Aerarum Iſmaelis Sciahinſciah, quàm refert in hiſtoria Gentium, reſpondet Anno Chriſti Domini ſolari 826. plùs minuſue. Nam Hegiram accidiſſe anno Chriſti 631. habet Iſmaëlis Tabula contra omnium Chronologorum Orientalium opinionem, qui eam reponunt in ann. Chriſti 622. & vndecim Heraclij, vno excepto Eutychio Alexandrino, qui eam reponit in ſua hiſt. Eccleſ. in an. Chriſti 614. ſcribit enim ibi: *A Chriſto Domino noſtro vſque ad Hegiram ſunt anni* 614. In quo octennio integro diſcrepat ab alijs Chronologicis. Sed hæc leuiter tetigiſſe, ſatis eſt; non eſt enim animus hic temporum apices data opera excutere, nec id ſanè vacat, nec huius loci eſt.

Principem autem Almamunum, eam procuraſſe verſionem librorum Apollonij, non ſolùm facilè, ſed procerto credendum eſt. Nam is omnium ſcientiarum ſtudijs vehementiſſimè ardebat, proindeque congerendorum vndique librorum nunquàm finem faciebat, eratque in eorum interpretes prolixiſſimus. Mira ſanè, quæ de illius, ac proaui Abugiahphar Almanſur animi propenſione in literas, & literatos viros refert Sahadus Filius Ahmedi Andaluſij in Hiſt. Arabum. *Is*, inquit ibi, *erat ſtatus Arabum in gentilitate. Poſtquàm verò fauoribus proſequutus eſt Deus Altiſsimus Haſcemitas, deuoluitque ad eos imperium, conuerſæ mentes ſunt, & intellectus à ſtupore, in quo iacebant, & exſuſcitata ingeniorum acumina poſtquàm extincta erant. Horum autem primus, qui promouendis ſcientijs operam nauauit, erat Abugiahphar Almanſur ſecundus Chalipha. Qui tametſi Iuriſprudentiæ deditiſsimus eſſet, & peritiſsimus; nihilominus, & Philoſophiæ vacabat ſtudio, ſed ardentius Aſtronomiæ. Cùm verò Imperij ſuſcepiſſet ſceptra Chalipha ſeptimus Abdalla Almanſun filius Aaronis Raſcidi, abſoluit ea, quæ inceperat Auus ipſius Almanſur, operamque dedit ſcientijs vbique inquirendis. Hinc Græcorum ſcripſit Imperatoribus rogans ſibi mitti quotquot*

haberi possunt Philosophorum libri, qui quotquot comparare potuerunt miserunt ipsi. Quibus ille vertendis peritissimos quosque selegit interpretes, & curam iniunxit interpretandi, & versi sunt eo studio maiori, quod fieri potest. Quo autem facto homines non solum incitabat, sed & cogebat quodammodò, vt ijs legendis, & ediscendis operam darent. Ipse verò sapientes viros familiarissime conueniebat, eorumque peramice vtebatur consuetudine, atque plurimum illorum delectabatur colloquijs. Nouerat, & quippe optime, sapientes viros Deo Altissimo mortalium esse carissimos, ac ipsi coniunctissimos, eò quod sese dederunt animæ rationalis virtutibus comparandis, posthabitis, & contemptis ijs, quibus Sinenses, ac Turcæ, eorumque similes incumbunt. Hi enim ostentare amant artium Mechanicarum subtilitatem, animæ irascibilis gloriantur potentijs, & concupiscibilis iactant sese facultatibus. Cùm tamen hæc omnia communia cum ijs ipsa habere bruta, scire debeant; imò longè ab illis superantur. Peritia, & subtilitate artis ab Apibus, quæ sua examina, seu penarium sexangula mira construunt arte. Audacia, & fortitudine à Leonibus, alysque feris, quibus in hisce haud comparandus est homo. Libidine, & Luxuria à suibus, atque alijs, quæ hic memorari necesse non est. Hacque de causa sapientes viri sunt lampades in tenebris, & mortalium omnium Domini. Et heu quam turpe, atque deforme est terrarum hoc orbis theatrum, quoties suis caret sapientibus. Hæc Sahedus in Historia Arabum.

Nostram autem versionem hanc Arabicam quod attinet, alia prorsùs est ab ea, quæ sub Almamuno confecta est. Hoc planè patet ex ipsius Auctoris Abalphathi in præfatione verbis. Dicit quippè ibi, se eam adornasse versionem pro regis Abicaligiar Bibliotheca. Abicaligiar autem rex salutatus est, teste Sciahinsciah, Gregorio, & alijs, Hegiræ anno 372. nempè annis 169. post Almamuni inaugurationem ijsdem, quos mox laudauimus, auctoribus.

Versionem tamen illam, quæ sub Almamuno facta est, nequaquàm vidit nostræ huius versionis auctor Abalphath, quemadmodùm ex verbis eius, quæ ad septimi libri adiecit calcem, patet luculenter. Ibi enim, *puto* inquit, *me in hoc*, nempè in hac versione concinnanda, *quoscunque alios anteuertisse*. Itaque existimat is noster Auctor, se omnium primum Apollonij versionem Reipublicæ literariæ dedisse. Quod, & in ipsa quoque

innuit

innuit præfatione, afferens vſque ad ſua tempora nullam integram librorum Apollonij extitiſſe inter Arabes verſionem; ſed fragmenta quædam. Ex quo arguere eſt, aut cum minimè antiquiorem Almamuni vidiſſe verſionem, aut iſtam non fuiſſe integram, ſed Epitomem aliquam ex ſeptem Apollonij decerptam libris, de qua ille in præfatione. Vt vt ſit noſtra hæc alia prorsùs eſt ab ea, & ad ipſius auctoris calculos redacta, atque adeò integra, & omnium perfectiſſima, atque abſolutiſſima.

Cæterũ admonitum volumus benignum lectorem, nos in hac verſione adornanda ſatis preſsè Arabicam ſecutos eſſe phraſim, nec omninò elegantiam, & venuſtatem linguæ expreſſiſſe, arbitrantes id maximè pertinere ad fidelis interpretis partes, & officium.

Ea autem quæ occurrunt circa ipſam phraſim, & vocabula nonnulla obſeruanda, Arabicæ Editioni reſeruauimus, rati ea commodius, & magis ad rem ibi exponenda eſſe, & ſuis exprimenda characteribus. Interim benè vale, & hoc qualicunque fruere ſtudio, & labore.



IO: ALFONSI BORELLI

PRÆFATIO AD LECTOREM.



CCIPE tandem, ſtudioſe Lector, in ſolemni hac pompa nuptiarum Sereniſsimi Principis Etruriæ Regio ſplendore à Sereniſsimo Magno Duce parata tamdiu deploratos, & expetitos libros poſtremos Conicorum Apollonij Pergæi, vtque ſine mora mens tua epulis hiſce lautiſsimis ſaturari poſsit, non te demorari diutine patiar in limine, recenſendo ſcilicet nomen Apollonij, patriam, ætatem, & opera ab eo conſcripta, neque inſuper doctrinæ conicæ ortum, & progreſſum à primis incunabulis ad virilem vſque, & vegetam ætatem, ad quàm Apollonius eam euexit, propter quod ſacimus magnus Geometra cognominatus eſt; hæc enim trita iam ſunt, & vulgaria; breuiter tantummodo percurram, quæ ad notitiam horum librorum facere videntur.

Illius pretioſiſsimæ bibliothecæ orientalis, quàm Sereniſsimo Ferdinando Primo gratitudinis ergo reliquerat Ignatius Neama Patriarcha Antiochenſis libellum nitidiſsimè Arabicè ſcriptum mihi oſtenderat Sereniſſimus Princeps Leopoldus Muſarum decus, & gloria, noſtrique ſæculi lumen eruditum. Codici inſcripſerat Raimundus, ſiue quis alius; Otto libri de Conici d'Apollonio del Patriarca. *Summa lætitia libellum exoſculatus, licet Arabici idiomatis ſim prorſus ignarus, non potui me continere, quin ſaltem contrectarem, atque reuoluerem paginas illas; cumque præter figuras mihi ſatis notas quatuor priorum Apollonij librorum vidiſſem alias conicas figuras, in quibus ab vno puncto in eis collocato eductæ erant plurimæ rectæ lineæ ad coniſectionem, illico in mentem venere illa Eutocij verba in expoſitione epiſtolæ Apollonij ad Eudemum:* Quintus, *inquit*, liber de Minimis, & Maximis magna ex parte agit; quemadmodum enim in elementis didicimus, ſi ab aliquo puncto in circulum lineæ ducantur, earum quidem, quæ ad concauam ipſius circumferentiam pertinent, maximam eſſe, quæ per centrum tranſit, earum vero, quæ ad conuexam, minimam eſſe, quæ inter dictum punctum, & diametrum interijcitur, ita & de

coniectionibus in quinto libro inquirit. Sexti, septimi, & octaui libri propositum manifestè ab ipso Apollonio explicatur. *Cùmq; posteà à quodam Maronita Arabicè callente accepissem tractatum, seu librum quintum Apollonij esse illum, in quo figuræ prædictæ delineatæ erant, pariterque in subsequenti libro sexto conspexissem figuras alias exprimentes æqualitatem, & similitudinem sectionum conicarum, mihi certum fuit, verè Apollonij esse libros illos. Haud tamen negabo scrupulum, ac dubitationem iniectam, ex eo quod textus ille Arabicus non præferebat in fronte Apollonij, vel vllius alterius nomen, & definitiones primi libri centuriam superabant, cum Apollonius non nisi nouendecim suo primo libro apposuisset. Insuper in prioribus quatuor libris non totidem figuras conspiciebam, nec omnino similes, easdemque, nec eodem ordine dispositas, ac in textu Græco Eutocij videre est; quare censui librum prædictum epitomen esse Conicorum Apollonij ab aliquo alio conscriptam. Hanc quoq; præclarissimi Torricellij fuisse sententiam postea didici ex eius Epistola ad eruditissimum Michaelem Angelum Riccium missam. Perstiti tamen debere latinè verti lucubrationem tam eximiam, eruditisq; optatissimam, nam nisi ipsissimum opus esset Apollonij, saltem ex ijsdemmet libris epitome illa desumpta, & transcripta existimari debuerat.*

Igitur Serenissimus Ferdinandus Secundus Magnus Dux munificentia verè regia, qua bonas artes promouere studet, annuente, & summopere coadiuuante Serenissimo Principe Leopoldo fratre Mathefeos, atque omnigenæ Sapientiæ perito cultore, atq; egregio vindice, præcepit, vt volumen Arabicum Romæ latinè redderetur ab Abrahamo Ecchellense linguarum Orientalium doctissimo, & peritissimo professore. Is quidem summa alacritate negotio suscepto primùm bono me esse animo iussit; monuit enim nouum non esse apud Arabes libros nomine auctoris in fronte carere, ostenditque in proemio eiusdem codicis apertissimè declarati esse libros Conicorum Apollonij paraphrasticè expositos: deinde ex translatione priorum quatuor librorum patuit demonstrationes propositionum penè non differre quoad doctrinam à textu Græco Eutocij, licet verbum verbo non responderet: nec mirari paucitatem figurarum, quandoquidem vna, eademq; figura quatuor, aut quinque propositionibus inseruiret. Incomparabili igitur gaudio perfusus Apollonium penè è manibus sublatum iterum amplexibus strinxi, & exosculatus sum. Sed molestum summopere fuit octauum librum deesse: collegi tamen Io:Baptistam Raimundum opusculum arithmeticum (quod in hoc codice Arabico subsequitur libro Septimo Apollonij) pro octauo

eiusdem libro accepisse, pariterq; Hieronymum Lunadorum in libro de Romana Curia nobis imposuisse, cum octo Apollonij libros ex Arabico transtulisse latinè Raimundum typis publicauit; qui enim fieri potuit, vt octo libros dedisset is, qui an septem, aut octo libri essent non animaduerterat?

Modo operæ pretium erit ante oculos ponere formam, & dispositionem huius paraphrasis ab interprete Abalphatho editæ. Et primo sciendum est eum collegisse simul septem integros libros Conicorum Apollonij ex fragmentis, quæ hactenus apud Arabes sparsim circumferebantur, disposuisseque propositiones eorumdem librorum alio ordine, ac diuerso ab Apolloniano, relictis tamen numeris antiquis, nam in primo libro post primam, & secundam propositiones subsequuntur vndecima, tertia, quarta, septima, & sic vlterius semper ordine perturbato procedendo. Hac nempe ratione simul collectis in eadem figura pluribus propositionibus, quas in locis dissitis collocauerat Apollonius, putauit Abalphathus breuiùs se eas demonstraturum retenta semper Apollonij sententia, scilicet ijsdem medijs; & eodem progressu, quo vsus est Apollonius, demonstrat Paraphrastes easdem propositiones. An vero variare noluerit reuerentia retentus, vel potius nequiuerit virium defectu, (quippe ingenio non admodum felici, et inueniendi sagaci à natura donatus) non ausim affirmare. Superaddit quoq; numerosam farraginem aliarum definitionum, quibus compendiosiùs, & clariùs demonstrationes absolui posse profitetur, quod quidem non raro ipse assequitur; aliquando verò ob affectatam nimiam breuitatem obscurior efficitur: accidit quoque, vt aliquæ definitiones inutiles, & otiosæ sint, vel repetitio declarationis earumdem prolixitatem creet maiorem.

Animaduersione dignum est, quod Manuscriptum licet non distinguatur capitibus, aut paragraphis, sed continuo, perpetuoquè sermone procedat more Arabum; in eo tamen numerorum tria genera passim occurrunt, qui omnes ferè interlineares, pauci quidem in margine positi, aliqui rubris characteribus depicti, alij vero positi super alios numeros in eadem linea, veluti fractiones numerorum describi solent, hac ratione $\frac{9}{49}$. 50. *vel* $\frac{16}{68}$. 69. 70. 71., *& licet raro synceri, & veridici sint, conieci tamen supremos numeros indicare partes, seu sectiones, in quas Abalphathus librum distribuit, atq; partitur: infimi verò numeri docent quotnam propositiones in vnaquaque sectione contineantur: itaque hi numeri* $\frac{16}{68}$. 69. 70. 71. *significant in lib. 5. Sect. 16. contineri Apollonij Propositiones* 68. 69. 70. 71. *reliqui numeri interlineares sic dispositi* 24. ex 5., *vel* 37. ex 6. *citationes sunt, indicantque Prop.* 24. *lib.* 5. *Conic.*

 Apoll.

Apoll., vel Prop. 37. lib. 6. Sed mirum quàm mendosi sint omnes ferè numeri huius codicis! in solo enim quinto libro frequenter duæ, vel tres propositiones diuersæ vno, & eodem numero designantur, & è contra plures, & separati numeri nulli propositioni tribuuntur; nuspiam enim reperies propositiones 16. 17. 18. 24. 40., & quamplurimas alias. Citationes postea inter propositiones interpositæ mendosissimæ, obscuriores tenebras obducunt, quare non parum laboris, & molestiæ habui, vt propositionibus horum subsequentium librorum numeros debitos, & legitimos assignarem; nam prioribus quatuor in libris propositionum numeri licet perturbato ordine dispositarum facilè restitui, & corrigi potuerunt ex Græco exemplari, at in libris 5. 6. & 7. numeros erroneos serie propositionum alterata nisi ariolando assequi quis poterit? Cum ex Arabico codice mendas hasce numericas corrigi posse Excellentissimus Abrahamus Ecchellensis desperasset, repetitis litteris, vt coniecturis negotium perficerem, iussit; & siquidem propositiones Apollonij vno, vel altero tantum ordine disponi potuissent, forsan mentem auctoris conijcere arduum non fuisset, sed inter multas, & varias series, quibus conica doctrina exponi posset, si eam, quàm Abalphathus elegit, assecutus fuero, fortunæ tribuendum erit.

Sed quid ego minutias numerorum consector, cum in textu ipso insuperabiles ferè, & maioris momenti difficultates supersint? nulla propositio fuit, in qua sententiæ, verba, aut numeri, aut litteræ non fuerint multifariam permutatæ, mutilatæ, aliæ pro alijs repositæ, atque in propositionibus plerisque tituli ipsi, & expositiones summopere deprauatæ, vt prorsus ignoraretur quid nam demonstrandum proposuerit Apollonius. Itaque verba, litteræ, numeri, citationes, imò sententiæ deficientes, aut permutatæ vna cum affectata Paraphrastis Arabici breuitate, & multiplici, & noua nomenclatura cimmerias tenebras effundebant. Hasce in angustias redactus, quod potui, feci, vt germanum sensum Apollonij, & correctissimum exhiberem textum.

Hanc tamen cautionem adhibui, vt in notis semper bona fide apponerem ipsissima verba textus, quæ transtulerat ex codice Arabico me præsente Excellentissimus Ecchellensis, ibidemque rationes apposui mutationis, & correctionis factæ. Itaque persæpe vbi sententia videbatur obscura, neque distinctè explanata, tunc quidem meis verbis declaraui. Et quia multoties ob nimiam paraphrastis breuitatem, vel librariorum vitio propositiones nõ solide demonstrantur, vel nequeunt ex præcedentibus deduci, addidi ex meo penu lemmata nonnulla, quibus euidenter confirmantur, quæ in

textu

textu ambiguitatem aliquam præseferebant. Apposui quoque prolixè propositionum casus omnes neglectos in textu, eorumque demonstrationes. Sed hisce omnibus in rebus religiosus adeò fui, vt omnia diuerso charactere in notis memorauerim, exceptis tamen ijs, quæ minoris momenti sunt, vt litteræ transpositæ, & deficientes, & verba aliqua impropria, & non significantia, quæ commemorare non censui, ne volumen in immensum excresceret.

Tandem potuissem quidem abundantioris doctrinæ gratia non pauca meo marte hisce libris superaddere non omnino forsan contemnenda; sed parcus adeo fui, vt tantummodo quæ ad illustrationem, & ornatum operis facere videbantur, adiecerim suntq; nonnullæ propositiones additæ, quæ nouæ, & forsan inelegantes non erunt.

Considerandæ modo sunt difficultates à præstantissimo, et doctissimo Claudio Midorgio propositæ contra Manuscriptum Arabicum Apollonij, quod Clarissimus, & de bonis litteris optimè meritus Golius ex oriente detulit, eademq; difficultates eodem iure nostrum Manuscriptum, quod Golianum, petunt. Verba Mersenni in præfatione Conicorum Apollonij suæ synopsis Mathematicæ hæc sunt. Suspicatur autem Claudius Midorgius hos tres libros, (*scilicet* 5. 6. *&* 7. *Conicorum Apollonij*) esse cuiusdam Arabis sub Apollonio latentis; quòd in quinto suo libro primam propositionem sexti Apollonij superius allatam non solum in cono recto, sed in quouis etiam scaleno, & illorum portionibus quibuscumque datis possibilia quæque demonstrat. *Hæc quidem ratio quanti ponderis sit æqui rerum æstimatores iudicent, & si quidem omnes, qui in Geometricis mediocriter versati sunt optimè norunt successiuè aliquid vlterius inueniri præter ea, quæ diuini Præceptores Euclides, Archimedes, Apollonius, & Ptolemæus ediderunt, facile enim esse inuentis addere quis ignorat? Nulli vnquam venit in mentem librum Spiralium non ab Archimede, sed ab aliquo alio scriptum fuisse, propterea quod vniuersaliùs quarumcumque spiralium passiones Neoterici demonstrarunt; Nec quia admirabilis Maurolicus in suo quinto Conicorum libro, & alij recentiores, sicuti præclarus Phylosophus, & Mathematicus Vincentius Viuianus Patritius Florentinus in suo erudito libro de Maximis, & Minimis alia longè diuersa ab Apollonij speculationibus excogitarunt, hos libros adulterinos esse ausi sunt affirmare. Et sicuti ipsemet Midorgius non repudiauit librum primum Conicorum ab Eutocio editum, licet ipse in suo libro tertio melius se demonstrasse propositiones* 52. 53. 54.

libri

libri primi summopere glorietur, pari iure hi libri adulterini censendi non erunt non alia de causa, nisi quia propositiones horum librorum non correspondent, nec assimilantur admirandis cogitationibus in eius sublimi mente repositis. Et sane non dubito, quòd si Midorgius ipse hos libros vidisset, & contrectaßet, omnino illius magni Apollonij esse absq; vlla hæsitatione affirmasset. Nam primi quatuor libri continent easdem propositiones, & sæpe numero eadem verba, quæ in textu Græco Eutocij leguntur: reliqui libri subsequentes docent ea, quæ in epistola ad Eudemum proposuerat se demonstraturum Apollonius, & quæ Pappus, & Eutocius distinctè, & expresè ibidem tractari affirmant. Rursus profunda mentis perspicacia, methodus scribendi, & genius Apollonij adhuc ibidem conspicitur, nec fieri potuit, vt à translatoribus, à Paraphraste, à temporis diuturnitate prorsus deleretur, atque mirandum ingenium Apollonij à tanta barbarie omnino occultaretur. Rursus in confesso est opera Euclidis, Archimedis, Apollonij, Ptolomæi, & aliorum magnorum virorum Arabicè translata fuisse, & expresè grauissimi scriptores Arabi, præcipuè Gregorius Bar-Hebræus lib. 9. Chronicorum ait, opera Apollonij Arabicè translata primò fuisse anno 200. AEgyræ Maumettanæ sub Almen Kalypha à Ioanne Patricida, & postea ab alijs recentioribus. Quare dubitandum non est hos esse veros, atque legitimos tres postremos Conicorum libros Apollonij Pergæi Paraphrasticè ab Abalphatho descriptos.

Fruere modo, mi lector, præclaro, & admirando beneficio Serenissimi Principis Etruriæ, qui regali magnificentia, et liberalitate pretiosissimum hunc thesaurum humanissimè largitur. Vale.

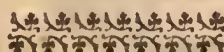
INDEX

Propositionum Lib. V. VI. VII. Conic. iuxta seriem numerorum ab Apoll. seruatam, cum Lemmatibus, & Proposition. additis,

Vbi indicantur sectiones, & pagina, in quibus propositiones reperiri debent.



APOLLONII PERGAEI CONICORVM LIB. V.



DEFINITIONES.

I.



SI à puncto aliquo in axe sectionis conicæ sumpto egrediantur aliquę rectæ lineæ ad sectionem, vocabo punctum illud, ORIGINEM.

II.

Et lineas, RAMOS.

III.

Segmentum autem axis intèr illud, & verticem sectionis ei proximiorem, MENSVRAM.

IV.

Sed si fuerit mensura æqualis semissi erecti, vocabo illam, COMPARATAM.

V.

Et perpendiculares cadentes ab extremitatibus ramorum super axim vocabo, POTENTES illorum ramorum.

VI.

Abscissa verò illarum potentium, ABSCISSA ramorum.

VII.

Et inuersa illarum potentium, INVERSA ramorum.

VIII.

Atque rectangulum contentum sub inclinato, & aggregato inclinati, & erecti, vel differentia transuersi, & erecti vocabo, FIGVRAM COMPARATAM.

IX.

In quolibet rectangulo applicato ad ſegmentum axis, ſi illud ſegmentum ad latitudinem illius rectanguli eandem proportionem habuerit, quam axis ad latitudinem figuræ comparatæ vocabo illud, EXEMPLAR.

X.

Si ex puncto ſuper axim educatur perpendicularis ad vtraſque partes ſectionis, & ex puncto aliquo illius perpendicularis educantur lineæ terminatæ ad ſectionem ex vtraque parte, vocabo punctum illud in perpendiculari ſumptum, CONCVRSVM.

XI.

Et lineas etiam, RAMOS.

XII.

Et qui ſecant menſuram, & terminantur ad ſectionem ex altera parte concurſus, RAMOS SECANTES.

XIII.

At qui non ſecat illam, & tranſit per concurſum, & terminatur ad axim, & ſectionem ſimul, RAMVM TERMINATVM.

XIV.

Sed cuiuſcumque rami ſecantis, cuius portio inter ſectionem, & axim intercepta eſt linea breuiſſima, vocabo illum, BREVISECANTEM.

XV.

Et vocabo ſegmentum axis inter perpendicularem, & verticem ſectionis proximiorem interceptum, MENSVRAM, quoque.

XIV.

Et portionem ſectionis conicæ diſſectam ab ordinatione axis tranſeuntis per originem, ſiuè per concurſum propè verticem proximiorem ſectionis, vocabo, SEGMENTVM illius puncti.

NOTÆ.

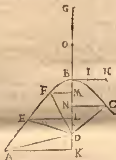
HAE definitiones non sunt Apollonij, sed Interpretis Arabici, qui in proemio huius operis apertè ait, addidisse plurimas definitiones in libris Apollonij, quibus theoremata breuissimè proponi posse profitetur, vt in prioribus quatuor libris videre est. Eas autem exemplis illustrare conabor.



I. Sit qualibet coni sectio A B C, cuius axis B D, & in eo sumatur quodlibet punctum D intrà sectionem, à quo educantur rectæ lineæ D A, D E, D F, D C vsque ad sectionem. Tunc vocatur punctum D, Origo.

II. Et lineæ D A, D E, & cateræ vocantur, Rami.

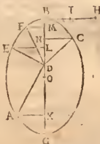
III. Portio verò axis B D inter originem D, & verticem B interposita vocatur Mensura. Sed in ellipsi A B C G, si axis portiones D B, & D G inæquales fuerint, tantummodò minor portio B D vocatur Mensura, non autem maior D G.



IV. Sit posteà recta B I semissis lateris recti B H iam si mensura D B aqualis fuerit semirecto B I, vocatur D B, Mensura comparata.

V. At si à terminis ramorum A, E, F C educantur ad axim perpendiculares A K, E L, F M, C N, ipsum secantes in K, L, M, N vocantur illæ rectæ lineæ Potentes illorum ramorum.

VI. Recta verò K B vocatur Abscissa rami D A, & L B Abscissa rami D E, & sic reliquæ omnes.

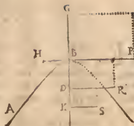


VII. Sit posteà O centrum sectionis, iam axis portio ex centro O vsquè ad potentialem A K educta, scilicet O K vocatur Inuersa rami D A, pariterque O M est Inuersa rami D F.

VIII. Si ponatur recta linea B P ad axim perpendicularis, quæ in hyperbola fiat aqualis aggregato, in ellipsi verò fiat æqualis differentiæ laterum recti B H, & transuersi G B, tunc rectangulum contentum sub G B, & B P vocatur, Figura comparata.

IX. Posteà si, vt G B ad B P ità fiat seg-

mentum axis D B ad D R, & compleatur parallelogrãmum rectãgulum B R, tunc spatium B R vocatur Exemplar. Pari ratione si, vt G B ad D P ità fiat segmentum axis D K ad latitudinem K S, compleaturque parallelogrammum rectangulum D S, vocabitur paritèr D S Exemplar.



X. *Et si C D perpendicularis fuerit ad axim B D, & producatur vltrà axim in E, atquè à puncto E extendantur vsquè ad sectionem rectæ lineæ E B, E F, E G, vocabitur E punctum Concursus.*

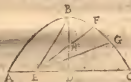
XI. *Et lineæ rectæ E B, E F, E G vocantur etiam Rami.*

XII. *Atquè linea recta E F secans axim in H vocatur Ramus secans.*



XIII. *Et recta linea E B conueniens cum axi in vertice sectionis vocatur Ramus terminatus,*

XIV. *Si verò rami secantis E F portio eius H F inter sectionem, & axim intercepta fuerit breuissima omnium linearum, quæ ex puncto H ad sectionem duci possunt, tunc ramus E F vocabitur Breuisecans. In textu Arabico secans ramus vocabatur, mendosè, vt arbitror, non enim hæc definitio distingueretur à duodecima definitione.*



XV. *Similitèr segmentum axis D B sectum à perpendiculari ad axim ex origine E ducta, vocatur quoquè Mensura.*

XVI. *Tandem si per punctum originis D, vel concursus E ducatur ordinata A C, tunc figura contenta ab ordinata A C, & sectione conica A B C, vocatur Segmentum illius puncti.*

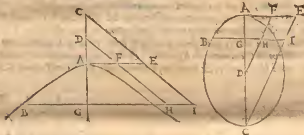
SECTIO

SECTIO PRIMA

Continens propositiones I. II. & III. Apollonij.

PROPOSITIO I.

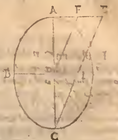
Si ex centro D sectionis A B (habentis centrum) egrediatur linea recta D F H bifariam diuidens A E erectum illius axis, quod sit perpendiculare super axim C A G, secans axis ordinationem B G I; vtiquè dimidium illius ordinationis, videlicet B G, poterit duplum plani, quod producit illa linea cum axi inter erectum, & illam ordinationem, nempè duplum A G H F.



a b QVia B G potest comparatum applicatum ad abscissam A G, & planum G F dimidium est illius comparati; ergò B G poterit duplum plani G F; & hoc erat ostendendum.

PROPOS. II.

PAritèr quoquè ostendetur, si potens transierit per centrum ellipsis, quod B G poterit duplum trianguli A F G.



PROP.

PROPOS. III.

SI verò in ellipsi cadat B G infrà centrum, poterit duplum differentię duorum triangulorum DAF, & DGH, nempè duplum plani G L. Et hoc erat propositum.

Notæ in Propositionem primam.

Vocat in primo libro interpres sectiones habentes centrum hyperbolem, & ellipsim, & vocat erectum latus rectum sectionis, vocat etiam ordinationem axis eam, quam nos ordinatim ad axim applicatam appellamus.

Quia B G poteſt comparatum applicatum ad abſciſſam A G, &c. *Vocat insuper parallelogrammum comparatum applicatum ad axis abscissam A G rectangulum ipsum A G I, quod quidem adiacet lateri recto A E latitudinem habens abscissam A G excedens in hyperbola, & deficiens in ellipsi rectangulo simile ei, quod latere recto, & transuerso continetur; scilicet rectangulo C A E.* a

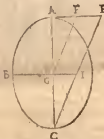
12. 13. lib. primi.

Et planum G F dimidium eſt illius comparati, &c. *Non erit inutile paulo fusius ostendere id quod ob nimiam facilitatem Apollonius tantummodò innuit. Ducatur recta linea F K parallela axi D A secans ordinatam B G productam in K: quia figuræ latera C A, & A E sunt ipsarum D A, A F duplicia, ergo C E, & D F H parallela sunt, estque K H parallela A E, cum ambo posita sint perpendiculares ad axim, & C A, F K sunt quoquè æquidistantes, ergò triangulum F K H simile est triangulo C A E, & proptereà parallelogramma rectangula F K H, & C A E similia erunt. Et quoniam quadratum ordinatæ B G æquale est rectangulo contento sub latere recto E A, & abscissa A G excedente* b

Ibidem.

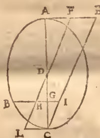
dente in hyperbola, & deficiente in ellipsi rectangulo F K H simile ei, quod lateribus recto, & transuerso continetur, scilicet C A E, & est A F semissis lateris recti, igitur quadratum BG aquale est summæ in hyperbole, & differentiæ in ellipsi rectanguli G A F bis sumpti, & rectanguli F K H, quod est aequale duplo trianguli F K H: sed quadrilaterum A G H F æquale est aggregato in hyperbola, & differentiæ in ellipsi rectanguli G A F, & trianguli F K H, ergò quadratum B G aquale est duplo quadrilateri AG H F, seù differentiæ triangulorum D A F, & D G H.

Notæ in Propositionem secundam.



SEcunda propositio facilè ex prima deducitur; nam, quando ordinata BG H I transit per centrum D ellipsis; tunc tria puncta G, D, H conueniunt, & triangulum D G H euanescit, & ideò differentia trianguli D A F, & trianguli D G H nullum spatium habentis, erit triangulum ipsum D A F.

Notæ in Propositionem tertiam.



IN tertia propositione similitèr, quandò ordinata B H G I eadit infrà centrum D ellipsis, tunc ducta C L parallela ipsi A E, erunt duo triangula D A F, & D C L æqualia inter se, cum sint similia, & latera homologa D A, D C sint æqualia, quia sunt semiaxes; propterea differentia triangulorum D G H, & D A F, seù D C L erit trapezium C G H L, quod subduplum est quadrati ordinatæ B C.

SECTIO SECVNDA

Continens propositiones IV. V. VI. Apollonij.

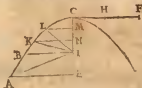
COmparata est minima ramorum egredientium ex sua origine (4) in parabola (5) & hyperbola (6) pariterque in ellipsi (si comparata fuerit portio maioris duorum axium, & tunc maximus est residuum transuersi axis.) Reliquorum verò propinquior

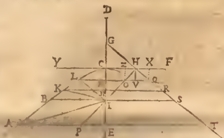
minimo

minimo remotiore minor est. Quadratum autem mensuræ minus est quadrato cuiuslibet rami assignati (4) in parabola quidem quadrato suæ abscissæ (5) & in hyperbola (6) & ellipsi exemplari applicato ad abscissam illius rami.

PROPOSITIO IV.

Sit sectio A B C, & axis eius C E, & inclinatus, siue transuersa D C centrum G, atque erectum C F, & ex C E secetur C I æqualis C H (quæ sit semissis erecti) & ex puncto originis I educantur rami I B perpendicularis, & I K, I L, I A, & per H, I in hyperbola, & ellipsi ducatur H I P, & per H, G recta H G T, ad quam ex A, B, K, L extendantur A P E T, B I S, K N R, L M O Q perpendiculares super C E. Dico, quod C I, comparata minor est, quam I L, & I L, quam I K, & I K, quam I B, & maximus ramorum in ellipsi est I D, & quod quadratum mensuræ I C minus est quadrato I L, in parabola quidem quadrato C M, & in hyperbola, & ellipsi exemplari applicato ad C M. Quoniam in parabola L M potest duplum M C in C H, nempè C I (12. ex primo) & quadratum I L æquale est aggregato duorum quadratorum L M, & M I, quadratum itaque L I æquale est quadrato M I, & M C in C I bis, quæ sunt æqualia duobus quadratis C I, M C. Quadratum igitur C I minus est quadrato L I quadrato ipsius M C, quæ est eius abscissa, & pariter ostendetur, quod quadratum C I minus est quadrato I K quadrato N C, & minus quadrato I B quadrato C I, & minus quadrato A I quadrato E C. a



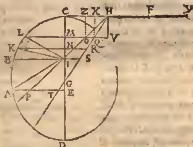


PROPOSITIO V. & VI.

At verò in hyperbola, & ellipsi producantur ex Q, O, H lineæ parallelæ ipsi M C, & quia I C ex hypothesi æqualis est H C, erit I M æqualis M O, quadratum itaque I M duplum est trianguli I M O, & quadratum L M duplum est trapezij C M Q H (prima ex 5.) ergo quadratum I L a b

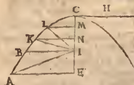
tum I L duplum est trianguli I C H vnà cum duplo trianguli Q H O, nempe cum plano rectanguli Q Z; sed quadratum I C est duplum trianguli I H C (eò quod C H æqualis est C I) ergo quadratum C I minus est quadrato L I plano rectanguli Q Z.

c Deindè ponamus in ellipsi Y F æqualem differentiæ, & in hyperbola
d æqualem aggregato D C, C F; ergo propter similitudinem duorum triangulorum G M Q, H V Q, & H V O, M I O, erit H V æqualis V O, & H
e V, vel ei æqualis O V ad V Q est, vt M G ad M Q, nempe vt G C ad H C, seù vt D C ad C F, igi-
f tur V O ad V Q est vt D C ad C F, & comparando summas terminorum ad antecedentes in hyperbola, & differentias eorundem ad antecedentes in ellipsi fiet O Q ad V O (quæ æqualis est O
g Z, nempè M C) vt Y F ad Y C, & est Y C, æqualis D C, & Y F æqualis summæ in hyperbola, & differentiæ in ellipsi ipsarum D C, & C
h F; quadratum igitur I C minus est quadrato I L rectangulo Q Z, quod est exemplar simile plano rectanguli C D in Y F, quæ est figura comparata. Atque sic demonstrabitur, quod quadratum I C minus sit quadrato I K exemplari applicato ad N C, & minus est quadrato B I exemplari applicato ad I C, & minus quadrato A I exemplari applicato ad E C. Estque M C minor, quàm N C, & N C, quam C I, & C I, quàm C E; igitur L I maior est, quàm I C, & I K maior, quàm L I, & I B maior, quàm I K, & I A, quàm I B. Et hoc erat ostendendum. Def. 8. 9. huius.



Notæ in propositionem quartam.

a Qvoniam in parabola L M potest duplum M C, &c. *Quadratum enim L M æquale est rectangulo sub abscissa M C, & latere recto C F, estque C H semisis erecti C F; ergo L M potest duplum rectanguli M C H.* 11. Lib. 1.

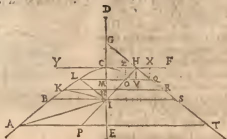


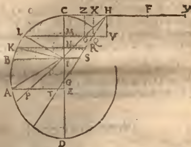
Notæ in propositionem quintam.

ERit I M æqualis M O, &c. *Propter parallelas M O, C H, & similitudinem triangulorum I M O, & I C H.* a

Ergo quadratum IL duplum est triãguli I C H, &c. *Eo quod quadratum I L æquale est duobus quadratis I M, M L in rectangulo triangulo I M L; Quadratis autẽ I M, & L M æqualia sunt triangulum I M O bis sumptum cum trapezio C M Q H bis sumpto; & quia trapezium C M Q H æquale est trapezio C M O H, cum triangulo H O Q; at triangulo I M O, & trapezio C M Q H simul sumptis æqualia sunt triangulum I C H, cum triangulo H O Q. Ergo quadratum L I æquale erit duplo trianguli I C H cum duplo trianguli H O Q.* b

1. huius.





Deindè ponamus in ellipsi Y F æqualem D C, & in hyperbola, &c. *Textus videtur corruptus, quem sic corrigendum puto. Ponamus Y F in ellipsi æqualem differentiæ, & in hyperbola æqualem aggregato D C, & C F.* c

Propter similitudinem triangulorum, &c. *Sunt enim duæ rectæ lineæ C G, & V H æquidistantes, quæ secant rectas lineas conuenientes in Q, & O.* d

Erit H V æqualis V O, &c. *Eo quòd M I ostensa est æqualis M O, estque HV ad V O in eadem proportione æqualitatis propter iam dictam similitudinem triangulorum.* e

Igitur V O ad V Q est, vt D C ad C F, & conuersa proportione deindè componendo in hyperbola, & inuertendo in ellipsi fiet in hyperbola Q O ad O V, &c. *Textum corruptum, atque confusum clariùs exponi posse censeo per Lemma inferius appositum hac ratione. Et comparando summas in hyperbola, & differentias terminorum in ellipsi ad antecedentes.* f

Vt Y F ad Y C, & in ellipsi, vt F C ad C F, & Y F in ellipsi æqualis DC, g

DC, quadratum igitur, &c. *Textum corruptum sic corrigendum puto; & est T C aequalis D C, atque T F aequalis summa in hyperbola, & differentia in ellipsi laterum D C, & C F.*

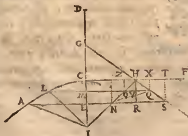
h Exemplar simile plano rectanguli C D in Y F in hyperbola, & Y C in ellipsi, &c. *Haec postrema verba expungenda duxi, tanquam superuacanea.*

Potest etiam ad imitationem Euclidis reperiri multitudo ramorum inter se aequalium, qui ex origine duci possunt in eadem conisectione. Itaque quoties mensura fuerit comparata, scilicet aequalis semissi lateris recti, tunc duo tantum rami inter se aequales a puncto originis ad vtrasque partes axis duci possunt in qualibet conisectione, eruntque illi, qui ad terminos L l cuiuslibet ordinatim applicatae L l ducuntur ab origine I, nam efficiuntur duo triangula I M L, & I M l, quae circa angulos aequales ad M, nempe rectos, habent latera aequalia, scilicet L M, & l M medietates ordinatim applicatae, & segmentum axis I M inter ordinatam, & originem est latus commune; ergo bases, seu rami I L, & I l sunt aequales. Reliqui verò rami supra, vel infra terminum eiusdem ordinatim applicatae minores, aut maiores sunt ramo ad eius terminum ducto; quare duo tantum rami ad vtrasque partes axis inter se aequales duci possunt. PROP. I. Additar.



Rursus quadratum rami I A remotioris a comparata superat quadratum rami I L propinquioris (in parabola quidem) rectangulo sub differentia, & sub aggregato abscissarum eorundem ramorum; in reliquis verò sectionibus rectangulo sub differentia abscissarum, & sub recta linea, ad quam summa abscissarum eandem proportionem habet, quam latus transuersum ad summam in hyperbola, & ad differentiam in ellipsi laterum transuersi, & recti. PROP. II. Add.

Et primò in parabola, quia quadratum I A aequale est quadrato I C cum quadrato abscissae C E; pariterque quadratum I L aequale est quadrato eiusdem I C cum quadrato abscissae C M; ergo excessus quadrati I A supra quadratum I L aequalis est differentia quadratorum E C, & C M; sed excessus quadrati E C supra quadratum M C aequalis est rectangulo, cuius basis aequalis est summa laterum E C, & C M; altitudo verò aequalis est E M differentia laterum eorundem quadratorum (vt deducitur ex elementis) igitur excessus quadrati I A supra quadratum I L aequalis est rectangulo, cuius basis est summa abscissarum E C, C M, altitudo verò E M differentia earundem abscissarum. 4. huius. ibidem.



Secundò in hyperbola, & ellipsi fiat exemplar N T applicatum ab abscissam C E. Et quia quadratum I A aequale est quadrato eiusdem

I C cum exemplari N T, & quadratum I L æquale est quadrato eiusdem I C cum exemplari Q Z. Ergò excessus quadrati I A supra quadratum I L æqualis est differentia exemplarium N T, & Q Z. Posteà ducatur recta Q N: quia triangula Q N S, O N Q æqualia sunt triangulo, cuius basi æqualis est summa rectarum N S, & O Q, altitudo verò V R, vel M E, suntque illa duo triãgula æqualia trapezio N O Q S siue excessui trianguli N H S, supra triangulum H O Q: ergo triãgulum cuius basis æquatur summæ ipsarum N S, O Q altitudo verò E M, æquale est differentia triãgulorum N H S, O H Q. Et similiter eorum dupla, scilicet rectangulum, cuius basi æqualis est summæ N S, O Q, altitudo verò æqualis M E, erit differentia exemplarium rectãgulorum N T, & Q Z; sed summa altitudinum V H, H R, seu summa abscissarum C M, C E ad summam basium N S, O Q eandem proportionem habet, quam vna H V ad vnam O Q, seu quam latus transuersum D C ad summam in hyperbola, & ad differentiam in ellipsi laterum transuersi D C, & recti C F: Igitur differentia exemplarium N T, Q Z, seu excessus quadrati I A supra quadratum I L æqualis est rectangulo contento sub E M differentia abscissarum, & sub summa ipsarum N S, & O Q, ad quam summa abscissarum eandem proportionem habet, quam latus transuersum ad summam in hyperbola, & ad differentiam in ellipsi laterum transuersi, & recti, quod fuerat propositum.

MONITVM.

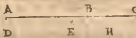
EX varia dispositione terminorum proportionalitatis scilicet duorum antecedentium, & duorum consequentium consurgunt plures modi argumentandi, quorum aliqui in elementis expositi non sunt, aliqui verò significantissimis vocibus, & breuius indicantur in textu Arabico, igitur, ne sępius repetatur prolixa expositio modorum argumentandi in proportionalibus, & non proportionalibus, qui cumulatè inferuntur in demonstrationibus Apollonij operę pretium erit eos semel hic exponere.

LEMMA I.

Si quatuor quantitates eandem proportionem habuerint, antecedentes, vel consequentes ad terminorum summas, vel differentias in eadem ratione erunt; & è contra.

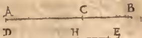
Habeat A B ad B C eandem proportionem, quàm D E ad E H: sequitur primò, quod A C ad C B sit, vt D H ad H E; & huiusmodi argumentatio vocatur in elementis compositio terminorum proportionis: itaque summa antecedentium, & consequentium ad easdem consequentes sunt etiam proportionales: si vero ex eadem hypothesi concludatur, quod A C ad A B, sit vt D H ad D E, vt nimirum summa terminorum proportionis ad antecedentes sint proportionales: quod quidem manifestum est, nam posita fuit A B ad B C, vt D E ad E H; erit inuertendo C B ad B A, vt H E ad E D, & componendo C A ad A B erit vt H D ad D E: modo huiusmodi argumentandi forma innominata est; potest autem breuitatis gratia appellari, Per comparationem summæ terminorum ad antecedentes.

Secundò concludi potest, quod A B ad A C sit vt D E ad D H; quia, vt in prima parte dictum est, A C ad A B erat vt D H ad D E, ergo inuertendo A B ad A C erit vt D E ad D H: hæc argumentandi forma vocari potest, Per comparationem antecedentium ad terminorum summas.



Tertiò concludi potest: quod B C ad C A, sit vt E H ad H D; nam componendo A C ad C B, erat vt D H ad H E, quare inuertendo B C ad C A erit vt E H ad H D, & hæc argumentatio fieri dicetur comparando consequentes ad terminorum summas.

Deinde sint eadem quatuor proportionales in secunda figura, nimirum totum A B ad segmentum eius B C sit vt totum D E ad portionem eius E H; tunc residuum A C ad C B erit, vt residuum D H ad H E; hæc argumentatio fieri dicitur in elementis, diuidendo terminos proportionis, estque comparatio differentiarum terminorum ad consequentes.



At si concludatur ex eadem hypothesi quod A B ad A C sit vt D E ad D H; hæc argumentatio in elementis fieri dicitur per conuersionem rationis estque comparatio antecedentium ad differentias terminorum.

Postea ex eadem hypothesi sequitur quod A C ad A B sit vt D H ad D E: quia per conuersionem rationis, seu referendo antecedentes ad differentias terminorum est A B ad A C, vt D E ad D H; ergo inuertendo A C ad A B erit vt D H ad D E, & hæc argumentatio innominata fiet comparando differentias terminorum ad antecedentes.

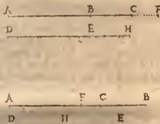
Tandem ex eadem hypotheſi ſequitur, quod C B ad C A ſit vt E H ad H D: nam diuidendo eſt vt A C ad C B, ita D H ad H E; ergo inuertendo B C ad C A erit vt E H ad H D: & hac argumentatio innominata fieri dicetur comparando conſequentes ad dereniſſitias terminorum.

LEMMA II.

Si prima A B ad ſecundam B C maiorem proportionem habuerit quàm tertia D E ad quartam E H: comparando antecedentes ad terminorum ſummas habebit A B ad A C maiorem proportionem quàm D E ad D H.

Lem.1. *Fiat A B ad B F, vt D E ad E H; erit B F maior quàm B C, atque A F maior quàm A C; ergo A B ad A F eandem proportionem habebit quàm D E ad D H; ſed eadem A B ad minorem A C maiorem proportionem habet quàm ad A F maiorem, ergo A B ad A C maiorem proportionem habet quàm D E ad D H.*

Secundò iiſdem poſitis, dico comparando terminorum ſummas ad antecedẽtes A C ad A B habere minorem proportionem quàm D H ad D E. Quoniam ex præcedenti caſu A B ad A C maiorem proportionem habebat quàm D E ad D H; igitur inuertendo C A ad A B minorem proportionem habebit quàm D H ad D E.



Tertiò, dico quod comparando conſequentes ad terminorum ſummas B C ad C A minorem proportionem habebit quàm E H ad H D; quia (ex hypotheſi) A B ad B C maiorem proportionem habet quàm D E ad E H componendo A C ad C B maiorem proportionem habebit quàm D H ad H E, & inuertendo B C ad C A minorem proportionem habebit, quàm E H ad H D.

Quartò, iiſdem poſitis in quarta figura, dico quod comparando differentias terminorum ad conſequentes A C ad C B maiorem proportionem habebit quàm D H ad H E: quia ex conſtructione A B ad B F eſt, vt D E ad E H, diuidendo A F ad F B erit vt D H ad H E; ſed A C maior eſt quàm A F, & C B minor, quàm F B; igitur A C ad C B maiorem proportionem habebit quàm A F ad F B; & propterea A C ad C B maiorem proportionem habebit, quàm D H ad H E.

Quintò, dico quod è contra, comparando conſequentes ad differentias terminorum C B ad C A minorem proportionem habebit quàm E H ad H D. Quia (ex præcedenti caſu) A C ad C B maiorem proportionem habebat quàm D H ad H E; ergo inuertendo C B ad C A minorem proportionem habebit quàm E H ad H D.

Ibidem. *Sextò, dico quod comparando antecedentes ad differentias terminorum B A ad A C minorem proportionem habebit quàm E D ad D H. Quia ex conſtructione*

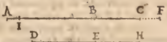
A B ad

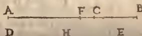
AB ad BF est, vt DE ad EH; ergo AB ad AF est, vt ED ad DH; sed BA ad maiorem CA habet minorem proportionem quàm ad FA; igitur BA ad AC minorem proportionem habet quàm ED ad DH.

Septimò, dico è contra, quod comparando differentias terminorum ad antecedentes CA ad AB maiorem proportionem habebit quàm HD ad DE. Quoniam, ex præcedenti casu, BA ad AC minorem proportionem habebat quàm ED ad DH; igitur inuertendo CA ad AB maiorem proportionem habebit quàm HD ad DE.

LEMMA III.

Si quatuor quantitates eandem rationem habuerint homologorum summæ, vel differentiæ in eadem ratione erunt.





OStensum enim fuit in elementis, quod proportionalium omnes antecedentes ad omnes consequentes eandem proportionem habent, quàm vna antecedentium ad vnam consequentium. Similiter ostensum fuit, quod si totum ad totum eandem rationem habuerit, quàm ablatum ad ablatum, & reliquum ad reliquũ, vt totum ad totum se habebit; sed vno verbo homologorum summa, vel differentiæ in eadem ratione erunt iuxtà Arabici expositoris compendium.

LEMMA IV.

Si prima AB ad secundam DE maiorem proportionem habuerit, quàm tertia BC ad qnartam EH: dico, quod comparando homologorum summas AB ad DE maiorem proportionem habebit, quàm prima cum tertia, idest AC ad secundam cum quarta, idest DH.

FIat BF ad EH, vt AB ad DE: ergo AB ad DE est, vt AF ad DH; sed AF maior est quàm AC, igitur AF ad eandem DH maiorem proportionem habet, quàm AC: & ideo AB ad DE maiorem proportionem habet, quàm AC ad DH. Lem. 3.

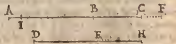
Secundò iisdem positis, dico, quod tertia BC ad quartam EH minorem proportionem habet quàm AC ad DH.

Fiat vt BC ad EH, ita IB ad DE, ergo CB ad EH est, vt CI ad HD; sed AB maior est quàm IB, & ideo CA maior quàm CI; igitur IC ad eandem Ibidem.

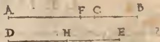
DH

DH minorem proportionem habet quàm AC, & propterea BC ad EH minorem proportionem habebit quàm AC ad DH.

Tertiò ijsdem positis in sexta figura, dico quod comparando homologorum differentias prima AB ad secundam DE minorem proportionem habet quàm differentia AC ad differentiam DH.



Lem.3. *Fiat BF ad EH, vt AB ad DE, ergo AF ad DH est vt AB ad DE, sed AF minor est quam AC, ergo AF ad eandem DH minorem proportionem habet quàm AC: & propterea AB ad DE minorem proportionem habet quàm AC ad DH.*



Ibidem. *Quartò, dico, quod tertia CB ad quartam HE minorem proportionem habet quàm differentia AC ad differentiam DH. Quoniam ex constructione AB ad DE est vt FB ad HE, erit FB ad HE, vt AF ad DH; sed CB minor est quàm FB, atque AC maior quàm AF, & AF ad eandem DH minorem proportionem habet quàm AC; igitur CB ad HE eo magis habebit minorem proportionem quàm AC ad DH qua erant ostendenda.*

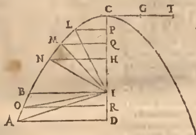
SECTIO TERTIA

Continens VIII. IX. X. Propos. Apollonij.

SI mensura fuerit maior comparata, dummodo in ellipsi minor sit medietate axis transuersi, tunc minimus ramorum in sectionibus est, cuius potentialis abscindit à mensura versus originem in parabola (8) lineam æqualem comparatæ, in hyperbola verò (9) & in ellipsi (10.) lineam, cuius inuersæ proportio ad illam est, vt proportio figuræ; & reliqui rami, quo accedunt ad minimum sunt minores remotioribus; & quadratum minimæ minus est quadrato cuiuslibet rami assignati in parabola quidem (8) quadrato excessus suarum abscissarum, & in hyperbola (9) & ellipsi (10.) exemplari applicato ad excessum suarum inuersarum. a

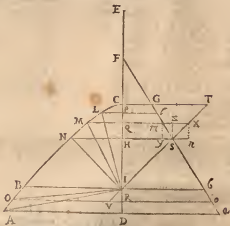
SIt itaque sectio ABC, & mensura IC, inclinatus, siue transuersa EC, dimidium erecti CG, centrum F, origo I, & IH in parabola sit æqualis CG, & in hyperbola, & ellipsi FH ad HI sit, vt FC dimidium inclinati, seu transuersæ ad CG, dimidium erecti, & educta ex H perpendiculari HN, & coniuncta recta NI; Dico NI minimum esse ramorum egredien- b

egredientium ex I, & insuper, propinquiores illi minores esse remotioribus ramis ex vtraque parte, & quod quadratum I N minus est quadrato M I (exempli gratia) in parabola quadrato QH, in hyperbola, & ellipsi
c exemplari applicato ad QH. Quoniam quadratum H N in parabola ęquale est H I, nempe C G in H C bis (11. ex primo) erit quadratum I N ęquale I H in H C bis cum quadrato H I; at quadratum M Q æquale est H I in Q C bis (11. ex primo) igitur quadratum M I ęquale est I H in Q C bis cum
d quadrato I Q; hoc autem est ęquale duobus quadratis I H, H Q, & I H in H Q bis; igitur quadratum I M æquale est I H in H C bis cum quadrato I H, quę sunt æqualia quadrato N I vnà cum quadrato H Q. Quadratum igitur M I excedit quadratum N I quadrato H Q. Et constat quoque, quadratum I L excedere quadratum I N quadrato P H; atque P H maior est, quàm Q H, ergo I L maior est, quàm I M, & I M, quàm N I. Ponamus iam B I perpendicularem super C I, ergo quadratum B I ęquale est I C
e in I H bis (11. ex primo); quadratum igitur I N minus est
f quàm quadratum B I quadrato I H. Et quia quadratum O R ęquale est C R in I H bis excedet quadratum I N (quod est ęquale quadrato I H, & I H in H C bis) duobus quadratis H I, I R, & I H in I R bis, nempè quadrato R H; atquè sic constat, quadratum A I excedere quadratum I N quadrato D H; estque D H maior, quàm R H, igitur I A maior est, quàm I O, & I O quàm I N. Et hoc propositum fuerat.





PROPOSITIO IX. & X.



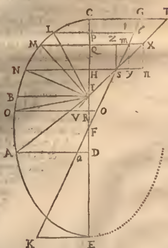
At in hyperbola (10.) & ellipsi educamus rectas lineas, G F quidem secantem A D in a, & N H occurrentem F G in S, & I S secantem C G in T, pariterque M Q secantem F G in m, & I T in X, & ex punctis m, S, x educamus inter N S, M X rectas m y, X n, S Z parallelas ipsi C I. Et quia C F ad C G, nempe F H ad H S posita est, vt F H ad H I erit H I æqualis H S; quadratum igitur I H est æquale duplo trianguli I H S, & quadratum N H æquale est duplo trapezij H G; quare quadratum N I æquale est duplo trapezij I G; similiter quadratum I Q æquale est duplo trianguli I Q X, & quadratum M Q est æquale duplo trapezij Q G; itaque quadratum ex I M æquale est duplo trapezij I G cum duplo trianguli m S X, quod est æquale plano m n: Et C F ad C G, nempe proportio figuræ est, vt S Z, nempe Z X ad Z m (& hoc quidem propter similitudinem triangulorũ) quare comparãdo priores ad summas terminorum in hyperbola, & ad eorundem differentias in ellipsi fiet X Z (quæ est æqualis ipsi X n) ad X m, vt proportio inclinati, siue transuersæ ad latitudinem figuræ comparatæ; igitur planum m n est exemplar, estque applicatum ad X n, nempe

Prop. 1. h.

Lem. 1. h.

Def. 9.

g



h

i

k

l

nempe ad QH. Eodem modo constat, quod quadratum IL excedit quadratum I N quantitate exemplaris applicati ad H P, & quod quadratum B I excedit quadratum I N exemplari applicato ad IH, & quod quadra-
m tum I O excedit quadratum I N exemplari applicato ad R H (eo quod quadratum R I æquale est duplo trianguli R V I, & quadratum O R æquale est duplo trapezij R G, at in ellipsi quando O R cadit infra centrum F æquale est duplo trapezij R K; quadratum igitur O I in ellipsi æquale est Prop.1.h.
n duplo trianguli K E F, quod est æquale F C G cum duplo trapezij V F, Prop.3.h.
igitur quadratum O I in hyperbola, & ellipsi excedit duplum trapezij I G
o (quod est æquale quadrato N I) duplo trianguli V S *o*, quod est æquale exemplari applicato ad R H: & similiter patet, quod quadratum A I excedit quadratum N I exemplari applicato ad D H, estque D H maior quàm R H, & R H maior quàm I H; quare A I maior est, quàm O I, &
p O I maior, quàm B I, & B I, quàm N I, & quodlibet horum duorum excedit N I potestate plano iam dicto, & hoc erat ostendendum.

Notæ in Propositionem VIII.

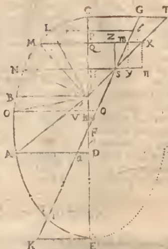
a SI mensura fuerit maior comparata, dummodò in ellipsi sit portio transuersæ, non maior medietate ipsius, tunc minimus, &c. *Sic puto legendum: Si mensura fuerit maior comparata, dummodo in ellipsi minor sit medietate axis transuersi, tunc minimus, &c. Nam si mensura sumi posset æqualis semitransuerso, tunc quidem origo esset in centro ellipsis, quare vndecima propositio huius esset superflua, in qua supponitur origo in ipsomet centro ellipsis. Animaduertendum est quod in hac propositione mensura necessariò sumi debet in axe maiori ellipsis, quandoquidem mensura I C ponitur maior, quàm C G, & C F maior quàm C I, ergo C F maior est quàm C G, & illius duplum scilicet axis E C maior erit duplo huius, sed vt E C ad duplum C G, ita est quadratum E C ad quadratum Recti axis eiusdem ellipsis: ergo E C est maior duorum axium ellipsis A B C.*

b Et educta ex H perpendiculari H N, &c. *Idest ex H educta H N perpendiculari ad axim C I, quæ secet sectionem in N, & iuncta recta N I, pariterque ductis reliquis ramis I M, I L, I B, I A, atque ab eorum terminis ad axim extensis perpendicularibus, vt in propositionibus quarta, quinta, sexta factum est.*

c Quadratum H N in parabola æquale est H I nempè C G in H C bis (prima ex quinto) &c. *Hoc deduci non potest ex prima propositione huius libri,*

 sed

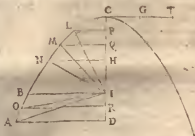
sed potius ex vndecima libri primi; est enim quadratum H N æquale rectangulo contento sub abscissa H C, & sub latere recto, estque rectangulum sub H C, & sub semierecto C G semissis illius; igitur quadratum H N æquale est duplo rectanguli H C G.



Hoc autem est æquale duobus quadratis I H, H Q, & I H in H Q bis, &c. *Post hac verba subiungo claritatis gratia, atque C H in H I bis æquale est duplo C Q in H I vna cum duplo Q H in H I.*

Ergo quadratum B I æquale est I C in I H bis, &c. *Hic pariter, vt clarior reddatur demõstratio, subiungo, scilicet duplo rectãguli C H I vna cum duplo quadrati H I; erat autem quadratum N I æquale duplo rectanguli C H I, & vnico quadrato H I, ergo, &c.*

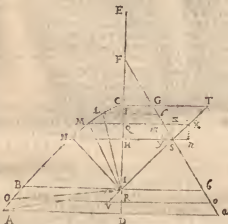
Et quia quadratum O R æquale est C R in I H bis, &c. f *Subiungo hanc declarationem. Scilicet duplo rectanguli C H I, & duplo quadrati H I cum duplo rectanguli R I H. Quare quadratum I O æquale est quadrato R I, duplo quadrati H I, duplo rectanguli R I H, & duplo rectanguli C H I: sed quadratũ H R æquale est quadrato R I, quadrato I H cum duplo rectanguli R I H. Ergo quadratum I O æquale est quadrato H R, quadrato H I cum duplo rectanguli C H I; erat autem prius quadratum I N æquale quadrato I H cum duplo rectanguli C H I. Igitur excessus quadrati I O supra quadratum I N est quadratum H R.*



Notæ

Notæ in Propoſitionem IX. & X.

g AT in hyperbola, & ellipſi educamus G F ad *a* ex A D, & H N ad *s* ex F G, & I S ad T ex G G, ſi educta occurrat ſectioni ad A, & M Q poſita ad *m* ex *a*, F G, & X in I T, & ex *m*, S X, *m y*, *x n*, S Z inter N S, M X, &c. *Eadẽ phraſi inconcinna exponitur vniuerſa conſtructio huius propoſitionis, ideo curaui eam reddere clariorem, dicendo; Educamus rectas lineas G F quidem ſecantem A D in a, &c.*



h Quadratum igitur I H eſt æquale triangulo I H S, &c. *Quia nimirum. Quadratum I H eſt æquale duplo iſoſcelei, & rectanguli trianguli I H S.*

i Et ſimiliter quadratum I Q æquale eſt duplo trianguli I Q X, &c. *Scilicet duplo trapezij I S m Q cum duplo trianguli S m X.*

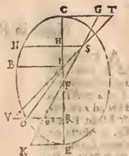
k Et hoc quidem propter ſimilitudinem triangulorum, at componendo proportionem in hyperbola, tum inuertendo, & reflectendo in ellipſi fit, &c. *Huiuſmodi verba inepta ad concluſionem inferendam commutaui dicendo; Quare comparando priores ad ſummas terminorum in hyperbola, & ad eorum differentias in ellipſi fit, &c. Quæ quidem expeditè (vt in primo præcedentium Lemmatum oſtenſum eſt) progreſſum declarant.*

l Vt proportio inclinati, ſiue tranſuerſæ ad latitudinem figuræ comparatæ; igitur planum *m n* eſt exemplar, &c. *Subiungo: nam, vt dictum eſt in quinta, & ſexta huius, poteſt hic demonſtrari, quod figura m n ſimilis eſt ei, quæ continetur latere tranſuerſo E C, & ſumma in hyperbola, & differentia in ellipſi laterum tranſuerſi, & recti iuxta definitiones octauam, & nonam.*

m Quadratum R I æquale eſt duplo trianguli R V I, & quadratum O R in hyperbola æquale eſt duplo trapezij R G, & in ellipſi æquale eſt duplo trapezij R K, &c. *Legendum puto quadratum R I æquale eſt duplo trianguli R V I, & quadratum O R æquale eſt duplo trapezij R G, at in ellipſi quando O R cadit infra centrum F æquale eſt duplo trapezij R K, &c. Deinde quum triangulum R V I ſimile ſit triangulo I H S propter parallelas V R, S H; ideò triangulum R V I erit quoque iſoſceleum, & rectangulum. Poſtea qua-* 1. huius.

dratum

Prop. 1. h. *dratum O R æquale est duplo trapezij R C G O; Sed in ellipsi quando ordinata O R cadit infra centrum F, tunc quidem ducta E K parallela C G, quæ secet G F in K, erit quadratum O R æquale duplo differentiæ triangulorum F R o, & F C G, seu F E K, quæ differentia æqualis est trapezio R E K o, ideoque duo quadrata ex I R, & ex R O, idest quadratum ex I O æquale erit triangulis F C G, & I R V bis sumptis dempto duplo trianguli F R o.*

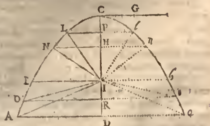


Quod est æquale triangulo F C G cum duplo trapezij V F, &c. *Addo, quæ videntur in textu deficere, seu cum duplo differentiæ triangulorum I V R, & F R o. In hyperbola verò quadratum O I æquale est spatio rectilineo V I C G o bis sumpto, quare in hyperbola, & ellipsi quadratũ O I æquale est duplo trapezij I C G S cum duplo triãguli V o S.*

Quod est æquale exemplari applicato ad R H, &c. *Hoc enim constat ex ijs, quæ supra dicta sunt.*

Estque D H maior in hyperbola, quàm R H, itaque A I maior, quàm O I, & O I in omnibus maior, quàm B I, &c. *Textum hunc corruptum sic restituo: Estque D H maior, quàm R H, & R H maior quàm I H; itaque A I maior est, quàm O I, & O I maior quàm B I.*

Similiter, vt in præcedenti sectione factum est, reperietur multitudo ramorum inter se æqualium, qui ex origine ad sectionem duci possunt. Existente mensura I C maiore, quàm comparata, si differentia abscissarum rami maioris,
PROP. III. Add. *& breuissimi æquales fuerit abscissæ rami breuissimi, erunt tantummodo tres rami inter se æquales; si verò maior fuerit, duo rami solummodo æquales erunt; at si fuerit minor eadem abscissa, erunt quatuor rami tantùm æquales inter se.*



Et primò ramorum I O, & breuissimi I N abscissæ sint R C, H C, & eorum differentia R H, sitque R H æqualis H C, & producatur O R perpendicularis ad axim quousque secet sectionem ex altera parte in puncto o, coniungaturque ramus I o. Dico quod tres rami I O, I o, I C tantũmodo inter se æquales sunt; quoniam quadrata in parabola rectarum R H, & H C,
8. huius. 9. 10. h. *seu in hyperbola, & ellipsi, rectangula exemplaria inter se similia applicata ad R H, & H C æqualia sunt inter se, cum eorum latera homologa R H, H C æqualia supposita sint; estque excessus quadrati rami I O, vel I o, seu I C supra quadratum rami breuissimi I N æqualis quadrato R H, vel C H in parabola, & in reliquis sectionibus, exemplaribus similibus applicatis ad easdem rectas æquales R H, H C;*

H C; igitur prædicti excessus tam in parabola, quàm in reliquis sectionibus æquales sunt inter se, & ideò quadrata ramorum I O, I o, I C, & rami ipsi æquales erunt: cumque quilibet alius ramus supra, vel infra ramum I O maior, vel minor sit illo, non erunt plures, quam tres rami inter se æquales.

Secundò H D differentia abscissarum rami I A, & breuissimi I N supponatur maior, quàm H C quæ est abscissa breuissimi rami I N; & producta similiter ordinata D A vltra axim ad sectionem in a, & coniuncta I a; Dico, quod duo rami tantummodo I A, & I a inter se æquales sunt: Quia H D maior est, quàm H C, erit quadratum ex H D maius quadrato H C; pariterque exemplar applicatum ad H D maius erit exemplari ei simili applicato ad H C, & ideo tam quadratum I A, quàm I a maius erit quadrato I C, cum quodlibet illorum maiori excessu superet quadratum breuissimi rami I N quam quadratum I C, quare tam ramus I A, quàm I a (qui æquales sunt) maiores erunt, quàm I C, & ideo maiores quàm intercepti inter I C, & I N, pariterque maiores, quàm interpositi inter I N, & I A, & minores omnibus alijs, qui infra ipsos cadunt. Quapropter duo tantùm rami I A, I a ab origine ad sectionem duci possunt inter se æquales.

Tertiò sint duæ abscissarum differentiæ H P, & H I æquales inter se, & quælibet earum minor H C abscissa rami breuissimi, & producantur perpendiculares ad axim L P, B I, donec conueniant ex altera parte cum sectione in l, & b, coniunganturque rami ad l, b. Dico, quatuor ramos I B, I L, I l, I b æquales inter se tantummodo duci posse; quia, vt dictum est, quilibet eorum superat ramum breuissimum I N potentia eodem excessu, erunt radij ipsi I B, I L, I l, I b æquales inter se, reliqui verò supra, & infra ipsos maiores, aut minores erunt, & ideo non possunt duci plures, quàm quatuor rami iam dicti æquales. Quod erat ostendendum.

Et insuper quadratum rami à breuissimo remotioris superat quadratum rami propinquioris, in parabola quidem rectangulo sub excessu, & sub aggregato differentiali suarum abscissarum ab abscissa rami breuissimi, in reliquis verò sectionibus rectangulo sub eodem excessu differentiali, & sub recta linea, ad quam summa differentialis eandem proportionem habet, quam latus transuersum ad summam in hyperbola, & ad differentiam in ellipsi laterum recti, & transuersi. PROP. IV. Add.

Quoniam in parabola quadratum I L superat quadratum I M eodem excessu, quo quadratum H P superat quadratum H Q (cum quadratum H P, atque quadratum I N simul sumpta æqualia sint quadrato L I, & quadrata ex H Q, & ex I N æqualia sint quadrato I M) sed excessus quadrati H P supra quadratum H Q æqualis est rectangulo sub P Q differentia, & P H, H Q, summa laterum eorundem quadratorum contento; igitur quadratum I L superat quadratum rami I M propinquioris breuissimo I N rectangulo sub P Q excessu, & P H Q Ex 8. hu.

aggregato

aggregato differentiali abſciſſarum ramorum I L, I M ab abſciſſa rami breuiſſimi.

Pari modo in hyperbola, & ellipſi quadratum I L ſuperat quadratum I M eodẽ Ex 9.10.h. *exceſſu, quo exemplar applicatum ad H P ſuperat exemplar applicatum ad H Q; ſed differentia exemplarium applicatorum ad H P, & H Q æqualis eſt rectangulo ſub P Q exceſſu differentiali, & recta linea compoſita ex X m, & u l, ad quam ſumma differentialis P H Q eandem proportionem habet, quam latus trãſuerſum ad ſummam in hyperbola, & ad differentiam in ellipſi laterum tranſuerſi, & recti, vt in nota propoſitionis 5. oſtenſum eſt; igitur quadratum I L ſuperat quadratum I M iam dicto rectangulo ſub P Q, & ſub X m, & u l, quod erat oſtendendum.*

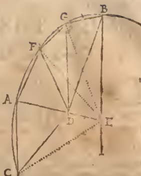
SECTIO IV.

Continens Propoſit. VII. & XII. Apollonij.

SI fuerit menſura A D minor comparata A E, (12.) aut ſit pars lineæ breuiſſimæ, & axis in ellipſi ſit maior, erit A D breuiſſimus ramorum egredientium ex origine eius in omnibus ſectionibus, vt ſunt F D, G D, B D, C D, & proximior illi minor eſt remotiore, nempe F D quam G D, & G D, quàm B D. a

Quia

b QVia A E eſt line a breuiſſima, igitur F E maior eſt illa; itaque angulus F A E maior eſt, quàm
c A F E; Ergo ille eſt multò maior quàm A F D, quare F D maior eſt; atque ſic
d patet quod G E maior ſit quàm E F, & ideo angulus G F E maior eſt, quàm E G F; igitur angulus G F D multò maior eſt, quàm F G D, & propterea G D maior eſt, quàm D F, & ſimiliter B D, quàm G D, & D C, quàm A D, & hoc erat propoſitum.



NOTÆ.

a SI fuerit menſura A D minor comparata A E, &c. *Senſus propoſitionis clarior ſic reddetur; Si fuerit menſura A D minor comparata A E, quæ in ellipſi ſumi debet in axi maiori eius (12.) aut ſit pars lineæ breuiſſimæ; erit A D minimus ramorum F D, G D, B D, C D, egredientium ex origine eius in omnibus ſectionibus, & proximior illi, &c.*

b Quia A E eſt linea breuiſſima, igitur, &c. *Vt constructio compleatur ſubiungo: Igitur ſi coniungantur rectæ lineæ E F, E G, E C, E B, & rectæ lineæ A F, F G, G B, A C erit F E maior, quàm A E.*

c Ergo hic eſt multò maior, quàm A F E, &c. *Senſus clarior reddetur hac ratione: Ergo angulus F A E multò maior erit, quàm A F D, qui eſt portio minoris anguli, quarè F D ſubtendens angulum maiorem eſt maior, quàm A D.*

d Igitur ipſe multò maior eſt, &c. *Superaddo, rationem illationis dicendo; Et propterea angulus G F D maiorem excedens erit multò maior, quàm F G D, qui portio minoris eſt.*

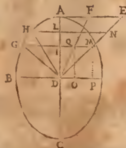
Manifeſtum eſt in prima figura propoſitionis 7. quando A D eſt portio axis minor comparata, quod tunc ex origine D duo tantummodo rami inter ſe æquales ad vtraſque partes axis duci poſſunt ad ſectionem, & erunt illi, qui ad terminos eiuſdem ordinatim ad axim applicatæ iunguntur ab origine D, vt conſtat ex ſuperiùs dictis.

At in ſecunda figura propoſitionis 12. poſſunt quidem ab origine D ad ſectionem duci hinc inde à breuiſſima D A, aliquando duo tantùm rami inter ſe æquales, aliquando tres, atque etiam quatuor inter ſe æquales, quæ cognitio pendet ex propoſitione 72. huius libri.

SECTIO QVINTA

Continens XI. Proposit. Apollonij.

Linearum egredientium ex D centro ellipsis A B C, breuissima est semiaxis minor rectus illius, qui sit B D, maxima verò est semiaxis transuersus, qui sit A D, & propinquiores maiori sunt maiores remotioribus, vt H D, quam G D, & quadratum cuiuslibet rami, vt G
D (exempli gratia) excedit quadratum breuissimę B D exemplari applicato ad inuersam illius I D. a



EDucamus itaque E A æqualem A D, & abscindamus ex illa A F ęqualem dimidio erecti, & iungamus D F, D E, & perducamus ex G, H b
perpendiculares ad D A, & sint G I M, H L N. Quia quadratum G I æ- c
quale est duplo trapezij I F (prima ex quinto) & quadratum I D est æquale duplo trianguli I D M, eo quod I D est æqualis I M, erit quadratum d
D G æquale duplo trianguli A D F (quod est æquale quadrato B D (2. ex quinto) vnà cum duplo trianguli Q M D, quod est æquale rectangulo Q P; igitur quadrati G D excessus supra quadratum B D est æqualis plano
Q P, & quia D A, nempe E A ad A F est, vt D I, nempe M I ad I Q, e
& per conuersionem rationis A E ad E F, scilicet dimidium transuersæ ad illius excessum super A F dimidium erecti, est, vt M I, nempe M P ad M Q; igitur planum Q P simile est figuræ comparatæ, & M P æqualis est D I. (Def 8.9. huius.) Similiter patet, quod quadratum D H excedit quadratum B D exemplari applicato ad D L, & quadratum D A superat quadratum B D exemplari applicato ad D A: Est verò D I minor, quàm D L, &
D L, quàm D A; igitur B D (quæ est dimidium recti) minor est, quàm f
G D, & G D, quàm D H, & D H quàm D A, quod erat ostendendum.

N O T Æ.

ET debet esse linea breuissima perpendicularis ad mensuram, nempe B a
D perpendicularis D A, &c. *Hæc omnino expungi debent, tanquam supernacanea, axes enim esse nequeunt, nisi ad inuicem perpendiculares sint; quare censeo ab aliquo verba illa addita textui Apollonij fuisse.*

Edu-

b Educamus itaque E A, &c. *Lego: Educamus itaq; E A perpendicularem, & æqualem A D.*

c Et perducamus ex G, H perpendiculares, &c. *Et perducamus ex G, H perpendiculares ad D A, & sint H L N, & G I M, quæ secent F D in Q, & D E in M, & N, atque à punctis Q, M educantur M P, Q O, parallelæ D A, quæ secent rectum axem B D in O, P. Addidi hæc postrema verba, vt constructio completa sit.*

d Eo quod I D est æqualis I M, &c. *Quoniam sicuti in triangulo D A E simili triangulo D I M (propter angulum D communem, & rectos angulos ad I, & A) latus D A æquale erat E A, ita latus D I æquale est I M.*

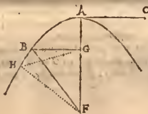
e Nempe M I ad I Q, & è contra, &c. *Lego: Nempe M I ad I Q, & per conuersionem rationis.*

f Cumque B D sit dimidium axis recti erit perpendicularis ad A D mensuram, &c. *Hæc verba postrema pariter expungi debent, nisi fortè corollarium propositionis exponunt, & tunc textus sic restitui deberet. Ex dictis constat, lineam breuissimam è centro ellipsis ad sectionem ductam, perpendicularem esse ad axim eius maiorem.*

Manifestum est ex centro ellipsis ad sectionem duci non posse plures, quàm quatuor ramos inter se æquales, neque pauciores duobus; tres autem nequaquam; nam duæ medietates cuiuslibet axis æquales sunt inter se, & quatuor rami ad extremitates duarum applicatarum ad axim æqualiter è centro distantium ducti æquales sunt inter se.

SECTIO SEXTA

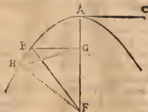
Continens Proposit. XIII. XIV. XV. Apollonij.



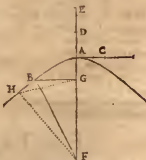
Ostendamus modò cõuersum harum propositionum; & est, quod linea breuissima B F continet cum sua mensura A F angulum acutum, vt B F A in omnibus sectionibus, & ellipsi (si tamen non egrediatur ex eius centro) eiusque potentialis abscindet a mensuram (13) in parabola æqualem comparatæ (14) & in hyperbola (15) & ellipsi lineam, ad quam inuersa est, vt proportio figuræ.

Sit centrum D, & dimidium erecti A C. Quia B F est linea breuissima, erit A F maior quàm A C, eo quòd si esset æqualis (4. 6. ex quinto) aut

aut minor illa (7. ex quinto) esset linea breuissima A F, aut pars illius, quod est falsum, igitur maior est, quàm A C; & propterea A D ad A C maiorem proportionem habet, quàm ad A F; ponamus ergo, vt A D ad A C, ita D G ad G F in hyperbola, & ellipsi; at in parabola, ponamus G F æqualem A C, & ducatur ex G perpendicularis ad sectionem. Dico, quod ei occurret ad B. Nam si occurrat sectioni ad aliud punctum, vt H coniuncta H F erit H F breuissima (8. 9. 10. ex quinto) sed supposuimus B F esse breuissimam, quod est absurdum, ergo perpendicularis occurrit sectioni in B. Et quia angulus B G F est rectus, erit angulus B F G acutus, quod erat ostendendum.



b

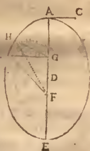


a

N O T Æ.

Et eius potentialis secet mensuram in parabola, &c. *Idest, & eius potentialis abscindet ex mensura vsque ad originem, in parabola quidem segmentum æquale comparata, & in hyperbola, & ellipsi lineam, ad quam inuersa eandem proporportionem habet, quam latus transuersum ad rectum.*

Et ducatur ex G perpendicularis ad sectionem, &c. *Et ducatur ex G recta linea perpendicularis ad axim, & producatur vsque ad sectionem.*



b

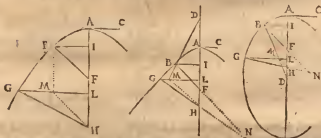
SECTIO

SECTIO SEPTIMA

Continens XXVI. XXVII. XXVIII. Propoſ. Apollonij.

PROPOSITIO XXVI. & XXVII.

ANgulorum ab axi ſectionis A H, & à lineis breuiſſimis F B, H G contentorum proximiores vertici ſectionis minores ſunt remotioribus, nempe angulus A F B minor eſt A H G.



SIt itaque centrum D, & ſemi inclinatus axis A D, ſiue ſemitranſuerſus, & dimidium erecti A C: educamus itaque duas perpendiculares
a GL, B I, & ſi ſectio fuerit parabole, erit F I æqualis L H, quia quælibet
b earum æqualis eſt A C (13. ex quinto) & L G maior eſt, quàm B I; angulus igitur F minor quàm H; ſi verò ſectio fuerit hyperbole, aut ellipſis,
c erit F I ad I D, vt H L ad L D, quia quælibet earum eſt, vt A C ad A D
d (14. 15. ex quinto) & permutando, erit I D ad L D nempe B I ad M L, vt I F ad L H, & anguli I, & L ſunt recti; igitur duo triangula B I F, M L H ſunt ſimilia, ideoque angulus A H G maior eſt, quàm angulus A F B, & hoc erat propoſitum.

PROPOSITIO XXVIII.

Hinc patet, lineas breuiſſimas ſibi occurrere ad partes axis ſectionis.

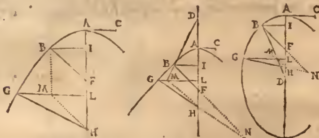
e QVia angulus A F B minor eſt, quàm angulus A H G; quare ſibi occurrunt ad partes F, H, & hoc erat oſtendendum. 26. 27. h.

NOTÆ

N O T Æ.

Educamus itaque duas perpendiculares, &c. *Educamus itaque ex punctis B, G duas G L, B I perpendiculares ad axim ei occurrentes in L, I.* a

Et L G maior est, quàm B I, &c. *Subiungo: Eo quod potentialis G L magis recedit à vertice, quàm B I; si iam ducatur B M parallela axi in parabola, & ex centro educta in reliquis sectionibus, secans G L in M, coniungaturque H M, erit in parabola M L minor quàm G L, & aequalis B I, & ideo angulus M H L minor erit angulo G H L, & aequalis angulo F, & propterea angulus F minor est, quàm G H L.* b



31. lib. 1. Si verò sectio fuerit hyperbole, aut ellipsis, &c. *Addo: Manifestum est rectam B D ex centro ductam sectionem secare in B, & propterea occurrere potentiali G L à vertice remotiori, quàm B I inter puncta G, & L, & erit F I, & caetera.* c

Erit I D ad L D, nempe B I ad M L, &c. *Addo (propter parallelas B I, M L, & similitudinem triangulorum D B I, & D M L.)* d

Quia angulus A F B minor est, quàm angulus A H G, &c. *Addo: Et sumpto communi angulo F H N erunt A F B, seu H F N, & F H N simul sumpti minores duobus angulis G H A, F H N, qui duobus rectis aequales sunt; quare B F, G H, concurrunt ad partes F, & H, vt in N.* e

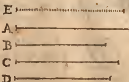
Pro intelligentia sequentium propositionum haec praemitti debent.

L E M M A V.

Habeat A ad B maiorem proportionem, quàm C ad D. Dico, rectangulum sub extremis A, D contentum maius esse eo, quod sub medijs B, C continetur, & è conuerso.

Fiat vt C ad D, ita E ad B; patet ex elementis, A excedere ipsam E; quare rectangulum A D maius erit rectangulo E D: est verò rectangulum B, C sub

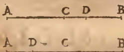
C sub intermedijs contentum æquale ci, quod sub extremis E, D quatuor proportionalium continetur; ergo rectangulum A D maius est rectangulo B C. Postea sit rectangulum A D maius rectangulo B C; Dico A ad B maiorem proportionem habere, quàm C ad D; Si enim hoc verum non est, habebit A ad B eandem, aut minorem proportionem quàm C ad D, quare rectangulum A D æquale, aut minus erit rectangulo B C, quæ sunt contra hypothesim; igitur A ad B maiorem proportionem habet, quàm C ad D.



LEMMA VI.

Si recta linea A B secetur bifariam in C, & non bifariam in D: Dico, quod semissis C B ad alterum segmentorum inæqualium D B habet maiorem proportionem, quàm reliquum inæqualium A D ad alteram medietatem A C.

QVoniam quadratum semissis C B, seu rectangulum B C A maius est rectangulo A D B sub inæqualibus segmentis contento; ergo ex præcedenti lemmate C B ad D B maiorem proportionem habet, quàm A D ad A C. Assumit Apollonius in subsequenti propositione 52. problema inuentionis duarum mediarum proportionalium inter quaslibet duas rectas lineas, vti notum, & multò antea à Menechmo Endoxi discipulo vulgatum, vt refert Eutocius, idemque postea Apollonius alio forsan modo reperit, vt ex eiusdem Eutocij commentarijs in Archimedem colligitur; sed huiusmodi problema, quod apponi debuerat in hoc quinto libro tanquam in proprio loco censendum est illud exposuisse in aliquo alio eius libro, iniuria temporum deperdito; Cumque Apollonianum problema non extet, relictis alijs quam plurimis neotericorum afferam hic propter antiquitatis reuerentiam Menechmi problema simplicissimum.

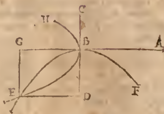


LEMMA VII.

SVnto duæ rectæ lineæ inæquales A B, & B C ad angulos rectos conuenientes in puncto B, producanturque indirectum, A B quidem indefinite in G, atque C B indefinite in D; posteà ad datam rectam lineam D B terminatam in B describatur in plano A D B parabole, ita, vt eius axis sit linea D B, vertex punctum B, atq; eius latus rectum sit recta A B, sitque sectio F B E. Similiter 53. primi.

in eodem

in eodem plano G B C describatur alia parabola E B H, cuius axis sit B G, vertex B, eiusque latus rectum B C.



Manifestum est, duas conisectiones F B E, & H B E non ad easdem partes conuexa habentes, se se mutuò secare, nedum in communi vertice B, sed etiam in aliquo alio puncto, vt est E. Tum coniungantur recta linea E D quidem perpendicularis ad axim B D, atque E G perpendicularis ad axim B G, cumque angulus G B D rectus sit ex hypothesi, erit D G parallelogrammum, cuius aduersa latera æqualia sunt inter se. Posteà, quia quadratum ordinatim applicatæ E D æquale est rectangulo sub abscissa D B, & latere recto B A, erit A B ad D E, seu ad B G, vt eadem B G ad D B, seu ad ei æqualem E G. Rursus quia in parabola H B E quadratum ordinatim applicata EG æquale est rectangulo sub abscissa G B, & eius latere recto B C, habebit B G ad G E eandem proportionem, quàm G E ad B C, & propterea quatuor recta lineæ A B, B G, G E, & B C erunt continuè proportionales; ideoque duæ reperta lineæ rectæ B G, & G E mediæ proportionales sunt inter extremas A B, & B C, vt erat faciendum.

8. lib. 1. & 33. lib. 4.

21. lib. 1.

Ibidem.

SECTIO OCTAVA

Continens Propos. IL. L. LI. LII. LIII. Apollonij.

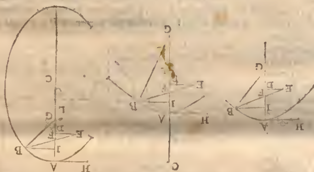
SI mensura non excedit comparatam, nullus ramorum secantium ex concursu egredientium erit Breuisecans: & lineæ breuissimæ ab extremitatibus ramorum ductæ in sectione abscindunt ex axi lineam maiorem, quàm abscindunt rami (51. & 52.) Si verò mensura excedit comparatam exponi debet linea certis quibusdam legibus inuenienda, quæ vocabitur TRVTINA. Et a
siquidem perpendicularis maior fuerit illa, tunc rami habebunt proprietates memoratas; si verò æqualis fuerit, tunc inter ramos vnicus breuisecans assignari potest, & proprietates reliquorum ramorum erunt illæ eædem superius expositæ; si verò minor est illa, ramorum omnium duo tantùm breuisecantes erunt, reliquorum verò, qui non intercipiuntur inter duos breuisecantes, eædem proprietates erunt; eorum verò, qui intercipiuntur, lineæ breuissimæ egredientes ab earum extremitatibus abscindunt ex axi lineas minores, quàm secant rami ipsi. Oportet autem in ellipsi

in ellipsi, vt mensura sumatur in maiori duorum axium, & rami egrediantur ad eius sectionem.

PROPOSITIO IL. & L.

b Ex E concursu super perpendicularem E D educamus E B secantem mensuram A D in F, & sectionem A B in B, & sit A H dimidium erecti; sitque mensura A D non maior, quàm H A.

c Dico quod B F non erit breuissima, & minima egrediens ex B abscindit ex sagitta maiorem lineam, quàm F A: at si fuerit A D maior, quàm A H, tunc B F potest esse linea breuissima.



d Educamus iam B I perpendicularem ad axim, & supponamus prius A D non maiorem quàm A H, & sit sectio parabole; igitur D I minor est, quàm A H, & ponatur G I æqualis A H, erit B G minima (8. ex quinto) & abscindit G A ex sagitta maiorem, quàm A F; si verò sectio fuerit hyperbole, aut ellipsis, sit centrum C; ergo A C ad A H non

e habet maiorem proportionem, quàm ad A D, quare C I ad I F maiorem proportionem habet, quàm C A ad A H; ponatur ergo I C ad I G, vt A C ad A H; ergo B G est minima, & abscindit (9. & 10. ex quinto) G A maiorem, quàm F A, quod erat ostendendum.

PROPOSITIO LI.

Deindè sit D A maior quàm A C, sitque prius sectio parabole, & secetur ex D A ipsa D F æqualis A C, & A G fiat pars tertia ipsius A F, educaturque B G perpendicularis ad axim, & vt D F ad F G, ita fiat B G ad lineam H (& hæc est Trutina) coniungaturque B E; & siquidem D E fuerit maior quàm H. a
Dico, quod nullus ramus breuisecans duci potest.

Quoniam D E maior est, quàm H habebit D E ad B G, nempe D I b
ad I G maiorem rationem, quàm G F ad F D, & componatur proportio, vt demonstretur, quod I G minor sit, quàm D F, quæ æqualis est ipsi A C; breuissima itaque egrediens ex B abscindit ex sagitta A D maiorem lineam, quàm A I (13. ex quinto); postea ducamus ex E ad sectionem ramos E K, E L ad vtramque partem B E, & duas perpendiculares KM, LN, producamus vsq; ad Q O tangẽtem sectionem in B; & quoniã sectio est, parabole, & O Q tãgens
35. lib. 1. est, igitur O G est dupla ipsius A G, quę est semissis ipsius F G; ergo G F æqualis est G O, erit igitur G O ad O M, nempe B G ad P M in maiori proportione, quã M F ad F G; c
itaque M K in F M minus est, quàm B G in G F, quod est minus quàm d
E D in D F propterea quod E D maior est quàm H; igitur E D in D F multò maius est, quàm K M in M F, quare E D ad M K, nempe D R ad R M maiorem rationem habet, quàm M F ad F D, & componendo patet, e
quod D F maior sit, quàm R M. Igitur breuissima egrediens ex K (13. f
ex quinto) cadit extra R K; Et simili modo constat, quod breuissima egrediens

d egrediens ex puncto L cadit extra L S, quapropter duci non potest ex E ad sectionem L B A linea, aliqua cuius portio intercepta inter axim, & sectionem, sit linea breuissima.

Pariter demonstrabitur, quemadmodum iam ostensum est, quod si E D
g fuerit æqualis H, tunc G I æqualis erit D F, quæ est æqualis ipsi A C; &
f ideo B I (8. ex quinto) vna est ex breuissimis, non autem R K, quia demonstrabitur, quod E D ad M K; nempe D R ad R M maiorem rationem habet, quàm M F ad F D, & propterea D F maior erit, quàm R M; breuissima ergo cadit extra R K. (13. ex quinto) Et S L quoque non est ex breuissimis, quod ita demonstrabimus; Si N S minor est, quàm D F; ergo breuissima egrediens ex L cadit extra S L: Non igitur ex E duci potest ad sectionem linea breuisecans præter E B, & hoc erat ostendendum.

Tertio loco sit E D minor quàm H, & ostendetur quod E D in D F
h minus est, quàm B G in G F; postea ponamus T G in G F æquale illi, & erigamus super F perpendicularem F V, & ducamus per T sectionem hyperbolicam circa duas continentes A F, & F V; duæ sectiones se mutuò secabunt in duobus punctis, & sint K, L, & educamus ex illis duas L N, P K M perpendiculares ad A D. Et quoniam perpendiculares K M, T G, L N parallelæ sunt continenti V F, erit K M in M F æquale L N in N F (12. ex secundo) & quodlibet eorum æquale est T G in G F, quod factum est æquale E D in D F; igitur E D ad K M, nempe D R ad R M est, vt M F ad F D, & componendo patet, quod D F est æqualis R M, & pro-
i pterea K R est linea breuissima (8. ex quinto.) 4. lib. 2.
k Et similiter patebit, quod L S sit breuissima.
l Et cum B I intercipiatur inter illas patet etiam, quod B G in G F maius sit, quàm E D in D F, ostendetur vt dictum est, quod I G maior sit, quàm D F; breuissima ergo ducta ex B cadit inter I, & A.

Deindè ex concursu E ad sectionem parobolicam A B Z educamus E X,
m E Z; quas intersecant l Z, X Y perpendiculares ad A D, quæ parallelæ sunt continenti F V secantes K T L hyperbolen, ergo a Y in Y F æquale est G T in G F, quod factum est æquale E D in D F, itaque E D in D F maius est, quàm X Y in Y F; igitur E D ad X Y, quæ est vt D b ad b Y maiorem rationem habet, quàm Y F ad F D, & componendo patet, quod F D maior est quàm b Y; itaque breuissima egrediens ex X abscindit ex A D lineam maiorem, quàm b A; Simili modo demonstrabitur, quod Z c
n non sit breuissima, & quod breuissima egrediens ex Z abscindit ex A D lineam maiorem, quàm A c; & hoc erat propositum.

PROPOSITIO LII. LIII.

Deindè sit sectio hyperbole, aut ellipsis A B, & axis illius C A D, centrum C, & D A mensura, quæ sit maior dimidio erecti, & perpendicularis E D. Dico, quod rami egredientes ex E
a habent superiùs expositas proprietates.

ITaque per C producamus CI parallelam perpendiculari ED, & ponamus quamlibet duarum proportionum CF ad FD, & EK ad KD, vt proportio figuræ, & educamus ex E, K rectas EI, KS parallelas ipsi C AD, & interponamus inter FC, CA duas medias proportionales CN, CO, & erigamus per O perpendicularem BO, quæ occurrat sectioni in B; & ponamus proportionem alicuius lineæ, vt Q ad BO compositam ex CD ad DF, & FO ad OC, & sit ED maior, quàm Q Trutina: Dico, quod nulla breuisecans egreditur ex E ad sectionem, & linea breuissima, egrediens ab extremitate cuiuslibet rami assignati, abscindit cum A ab axi maiorem lineam, quàm secant illi rami. Producatur priùs EB secans axim in H, & quia ED maior est, quàm Q, ergo proportio ED ad BO (quæ componitur ex ED ad DK, nempe IC ad CS, & ex DK, nempe GO ad OB) maior est proportione, quàm habet Q ad BO, quæ ex hypothesi componebatur ex CD ad DF; & ex FO ad OC; sed ED ad DK est, vt CD ad DF (quia quælibet earum est, vt proportio figuræ compositæ, vel diuisæ) remanet proportio OG ad OB maior ea, quàm habet FO ad OC; igitur OG in OC, nempe rectangulum CG maius est, quàm BO in OF; & ponamus rectangulum FG commune, erit rectangulum FS maius, quàm BG in GM; est verò rectangulum FS æquale rectangulo EM (eo quod EK ad KD, nempe ad FM est, vt SM ad MK, quia quælibet earum est, vt proportio figuræ; itaque rectangulum EM maius est, quàm MG in GB, & propterea EK ad BG, nempe KR ad RG maiorem rationem habet, quàm GM ad MK, ergo componendo, patet, quod KM, nempe DF maior est, quàm GR, & ideo EI ad KM, nempe CD ad DF, seu IC ad CS minorem proportionem habet, quàm EI ad GR, quæ est, vt IT ad BG, propter similitudinem duorum triangulorum EIT, BGR, ergo IT ad BG maiorem rationem habet, quàm IC ad CS, seu ad OG; & comparando homologorum differentias in hyperbola, & eorum summas in ellipsi, habebit CT ad BO, nempe CH ad HO maiorem rationem, quàm IC ad CS, nempe CD ad DF, & diuidendo in hyperbola, & componendo in ellipsi CO ad OH, habebit maiorem proportionem quàm CF ad FD, quæ est, vt proportio figuræ; igitur breuissima egrediens ex B (9. 10. ex quinto) abscindit cum A maiorem lineam, quàm AH.

Lem. 7. (margin)

Lem. 5. præmiss. (margin)

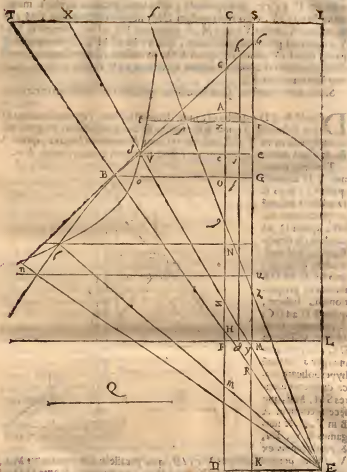
ibidem. (margin)

Lem. 4. præm. (margin)

Posteà educamus ex E lineam occurrentem sectioni in V, & producamus eam, quousque occurrat CI ad X, & ducamus per B lineam tangentem sectionem, quæ occurrat inclinato, siue transuersæ in *a*, & per V ducamus perpendicularem super axim, cui occurrat ad *c*, & occurrat tangenti B *a* in *d*; & quoniam OG ad OB, quemadmodum demonstrauimus, maiorem proportionem habet, quàm FO ad OC, ponamus *f*O ad OB, vt FO ad OC, & per *f* producamus *f g h* parallelam axi AD: Et quia *f*O ad OB est, vt FO ad OC, erit rectangulum *f*OC æquale BO in OF, & ponamus rectangulum *f*F communiter fiet B*f* in *f g* æquale *g* F in FC, & quia CO inuersa in trutinatam C*a* æquale est quadrato CA dimidij inclinati, siue transuersæ (39. ex primo) erit OC ad CA, vt CA ad C*a*; igitur C*a* est linea quinta proportionalis aliarum quatuor linearum proportionalium assignatarum; ergo FC ad CO est, vt CO ad C*a*

37. primi. (margin)

Right margin letters: b c d e f g h i k l m n o



C *a*, & comparando homologorum differentias erit F O ad O *a*, vt F C ad CO, quæ eſt, vt *f* B ad B O, nempe *f h* ad O *a*; igitur proportiones ipſarum F O, *f h* ad eandem O *a* eædem ſunt; ergo ſunt æquales; & propterea *f i* ad *i h* maiorem proportionem habet, quàm ad *f g*, & compo- Lem. 4.
p nendo *f h* ad *i h*, nempe B *f* ad V *i* maiorem proportionem habet; quàm *i g* ad *g f*; ergo B *f* in *f g*, nempe rectangulum *g* C maius eſt quàm *i* V
q in *i g*, & ponamus rectangulum *g e* commune, erit aggregatum rectangulorum

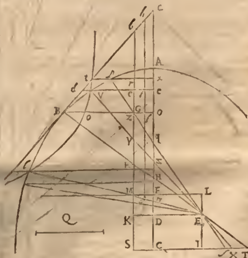
gulorum C g, g e, in hyperbola, vel eorum excessus in ellipsi maior, quàm M e in e V, ergo rectangulum C M, nempe rectangulum E M multò maius est, quàm V e in e M, & propterea E K ad e V, nempe K Y ad Y e maiorem proportionem habet, quàm e M ad M K, & componendo patet, quod e Y minor sit, quàm K M, & constat (quemadmodum antea demonstrauimus) quod breuissima egrediens ex V abscindit ab axi maiorem lineam quàm r Z. r s

Lem. 5.

Simili modo constat, quod breuissima egrediens ex l eiusdem sit rationis. t

DEindè sit E D æqualis Q, inde demonstrabitur, (quemadmodum supra factum est) quod B H tantùm sit linea breuissima, & quod minima egrediens ex V abscindit ab axi cum A maiorem lineam, quàm A Z, & quod minima egrediens ex l secet maiorem lineam, quàm A m. a

Tandem ponamus E D minorẽ, quàm Q, ergo E D ad B O minorẽ proportionem habet, quàm Q ad eandem; & demõstrabitur (quemadmodum dictũ est) quod G O ad O B minorem proportionem habeat, quàm F O ad O C; & ponamus O G ad O o, vt F O ad O C; & producamus per o sectionẽ hyperbolicam circa duas continentes S M, M F, quę secet sectionem A B in V, l, & iungamus E V, E l, & producamus ex V, l duas perpendiculares V e, l P, quæ parallelæ sint continenti M F, ergo o G in G M est æquale V e in e M (12. ex secundo) & quia G O ad O o est, vt F O ad O C erit o O in O F æquale rectangulo G C, & ponamus rectangulum F G commune fiet rectangulum C M (quod erat æquale rectangulo M E) æquale ipsi o G in G M, quod est æquale ipsi V e in e M; ergo rectangulum E M æquale est ipsi V e in e M. Tandem prosequamur superiorem demonstrationem, vt ostendatur veritas reliquarum propositionum, & hoc erat propositum. b c d e



PROP.

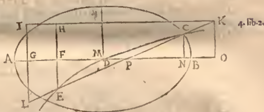
PROPOSITIO LIV. LV.

a ITaque ostensum est, vti memorauimus, quod ex concursu duarum breuissimarum ad conisectionem non egrediatur alia breuisecans præter illas duas, & quod reliqui rami ex eorum concursu educti ad sectionem habent proprietates superiùs expositas.

PROPOSITIO LVI.

In ellipsi ramorum, secantium vtrumque axim, à concursu vltra centrum posito egredientium, vnius tantum portio, inter
a axim maiorem, & sectionem intercepta, erit linea breuissima, siue mensura ipsam comparatam, nec non perpendicularis ipsam trutinam superet, æquet, vel ab ea deficiat.

b SIt sectio ellipsis A C B, & axis maior transuersus A B perpendicularis E F, centrum D, & ponamus D G ad G F, vt proportio figuræ, & similiter E H ad H F, & producamus per H rectam I H K parallelam ipsi A B, & per G rectã I G L ipsi E F, quæ sibi occurrant
c in I, & ducamus per punctum E sectionem hyperbolen E M C circa duas eius continentes L I, I K, quæ occurret sectioni A C B ellipticæ, quia I L, I K sunt duæ cõtinentes sectionem E M C, & proportio E H ad H F posita est, vt D G ad G F;



d ergo E H prima proportionalium in H I, nempe G F quartam, æquale est D G secundæ in I G, nempe F H tertiam; ergo punctum M est in illius diametro, & propterea sectio hyperbole E M C transit per centrum sectionis ellipsis A C B; quare duæ sectiones se inuicem secant, sitque
e concursus in C, & producamus per E, C lineam occurrentem duabus continentibus sectionem in L, K, & producamus duas perpendiculares C N, K O super A B. Et quia K C, L E sunt æquales (16. ex secundo) erit G F
f æqualis O N; quare F O æqualis est ipsi G N; atque E H ad H F, nempe E K ad K P, seu F O (quæ est æqualis ipsi G N) ad O P eandem proportionem habet, quàm D G ad G F, quę est ęqualis ipsi O N, & ideo G N ad O P est, vt D G ad O N, & comparando homologum differentias D N ad N P

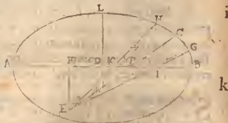
4. lib. 2. 8. lib. 2. Lem. 3.

ad N P erit, vt D G ad G F, quæ est proportio figuræ; ergo C P est linea breuissima. (10. ex quinto) Et hoc fuit propositum.

PROPOSITIO LVII.

Et dico, quod non reperiatur vllus alius ramus, à quo abscindi possit inter sectionem, & D B linea breuissima. g

NAm si producantur E H, E G ad vtrasque partes ipsius E C secantes D B in K, I, & producamus per D perpendicularem ad A B, h quæ occurrat sectioni ad L, & ipsi E C ad M, quia iam i productæ sunt ex concursu M duæ breuisecantes M C, M L (51. ex quinto) igitur linea educta ex M ad H abscindit ex D B cum B maiorem lineam, quàm secat k breuissima egrediens ex H (11. ex quinto) & linea educta ex M ad G abscindit ex D B lineam minorem ea, quàm secat linea breuissima egrediens ex G (51. ex quinto) sed E H, & E G efficiunt abscissas opposito modo; ergo non sunt duæ breuisecantes, & propterea non reperitur alius ramus, cui competat proprietas ipsius E C, & hoc erat ostendendum.



Notæ in Proposit. IL. L.

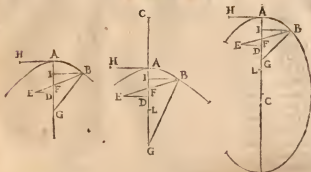
SI verò mensura excedit comparatam educatur linea, ad quam comparatur perpendicularis, & vocabo lineam illam Trutinam, &c. *Sic legendum puto; Si verò mensura excedit comparatam exponi debet linea certis quibusdam legibus inuenienda, quæ vocabitur Trutina.* a

Ex E concursu super perpendicularem, &c. *Idest. Ex E concursu perpendicularis E D ad axim A G, & ramorum secantium educamus E B secantem mensuram, &c.* b

Tunc B F non est ex minimis, &c. *Dico quod B F non erit recta linea minima earum, quæ inter punctum sectionis B, & axim intercipitur.* c

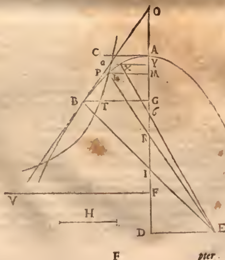
Et ponatur G I æqualis A H, &c. *Et ponatur G I æqualis A H, iungaturque B G, cumque A D posita sit non maior, quàm H A, erit illius portio F I minor, quàm A H, seu quàm G I, ergo B G est breuissima, &c.* d (8. huius.)

Ergo C A ad A H non habet maiorem proportionem, quàm ad A D; quare D I ad I F, &c. *Ergo G A ad A H non habet maiorem proportionem, quàm ad A D, & addatur indirectum recta A L æqualis A H in hyperbola, & auferatur* e



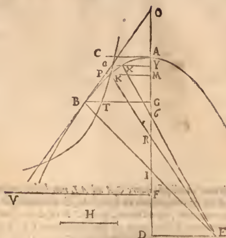
auferatur in ellipsi; quare C A ad A L non habet maiorem proportionem, quàm ad A D, & componendo in hyperbola, & diuidendo in ellipsi C L ad A L, non habet maiorem proportionem, quàm C D ad D A, sed C D ad A D minorem proportionem habet, quam ad eius segmentum I D, ergo diuidendo in hyperbola, & componendo in ellipsi habebit A C ad A D, & adhuc ad A L, seu A H minorem proportionem, quàm C I ad I D, habet verò C I ad I D minorem rationem, quàm ad eius segmentum I F; igitur C I ad I F maiorem proportionem habet, quàm C A ad A H.

Notæ in Proposit. LI.



a Dico quod nullus ramus breuisecans duci potest, &c. *Dico, quod ex concursu E ad sectionem nullus ramus breuisecans duci potest.*

b Quoniam D E maior est, quàm H, &c. *Quoniam D E maior est, quàm H habebit E D ad B G maiorem rationem, quàm H ad eandem B G; posita autem fuit inuersè G F ad F D, vt H ad B G; ergo E D ad B G maiorem rationem habet, quàm G F ad F D; & pro-*



pter parallelas D E, B G, & similitudinẽ triangulorum E D I, & B G I, est D I ad I G, vt E D ad B G; igitur D I ad I G maiorem proportionem habet, quàm G F ad F D, & componendo D G ad G I maiorem rationem habebit, quàm eadem G D ad D F; & Ideo I G minor est, quàm D F.

Igitur G F æqualis est G O, ergo G O ad O M, &c. *Igitur G F æqualis est G O, & quia F O secatur bifariam in G, & non bifariam in M (ex lemmate sexto huius libri) habebit semissis G O ad vnum segmentorum inæqualium M O maiorem proportionem, quàm reliquum segmentum M F ad alteram medietatem F G, sed propter parallelas P M, B G, & similitudinem triangulorum B G O, P M O est G O ad O M, vt B G ad P M, ergo B G ad P M maiorem proportionem habet, quàm M F ad F G: habet verò B G ad minorem M K maiorem proportionem, quàm ad M P (cum punctum P tangentis cadat extra sectionem); ergo B G ad K M adhuc maiorem proportionem habet, quàm M F ad F G.* d

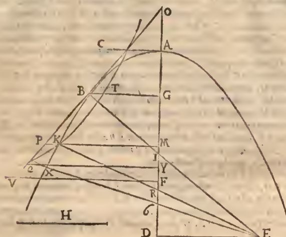
Itaque K M in M F minus est, quàm B G in G F, &c. *Quoniam prima B G ad secundam K M maiorem proportionem habet, quàm tertia M F ad quartam F G; ergo ex lemmate quinto huius libri rectangulum sub intermedijs contentum K M F minus erit rectangulo B G F sub extremis cõtento; postea, quia H ad B G ex hypothesi erat, vt G F ad F D, posita autem fuit E D maior, quàm H, quæ est prima proportionalium; ergo E D ad B G maiorem proportionem habet, quàm G F ad F D, & propterea rectangulum sub extremis E D F maius erit rectangulo sub intermedijs contento B G F; fuit autem rectangulum B G F maius rectangulo K M F; igitur rectangulum E D F multò maius est, quàm rectangulum K M F, & ideo, ex eodem lemmate quinto, E D ad M K, nempe D R ad R M (propter similitudinem triangulorum E D R, & K M R) maiorem rationem habet, quàm M F ad F D.*

Lem. 5.

Et componendo patet, quod D F, &c. *Quoniam D R ad R M maiorem rationem habet, quàm M F ad F D, componendo D M ad M R habebit maiorem proportionem, quàm eadem M D ad D F, & propterea D F maior est, quàm R M, est verò semissis erecti A C æqualis D F ex constructione, igitur M R minor est A C medietate lateris recti, & propterea breuissima educta ex K secat ex axi segmentum maius, quàm M R; ideoque cadit extra, scilicet infra ramum K R E.* e

8. huius.

Et



f Et ſimili modo conſtat, quod breuiſſima egrediens ex puncto L cadit extra S L, &c. *Ad vitandam confuſionem figuræ, & prolixitatem demonſtrationis appoſui duas figuras, in quibus duo caſus iiſdem caracteribus notantur, itaque abſq; nouo labore, ſi inſpiciatur ſecunda figura, iiſdem verbis prioris caſus, oſtendetur caſus ſecundus.*

g Pariter demonſtrabitur, quemadmodum iam oſtenſum eſt, &c. *Pars ſecunda huius propoſitionis innuitur tantummodo paucißimis verbis; quare maioris claritatis gratia integram demonſtrationem hic afferre libuit.*

Demonſtratio ſecundæ partis.

PROPOSITIONIS LI.

Eſto E D æqualis trutinæ H: Dico ex concurſu E vnicum tantum breuiſecantem ramum duci poſſe.

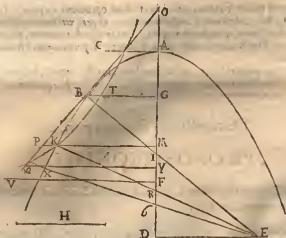
In eadem figura, quia ex conſtructione H ad B G eſt, vt G F ad F D, ponitur verò E D aqualis H; ergo E D ad B G, ſeu D I ad I G (propter ſimilitudinem triangulorum E D I, B G I) eſt, vt G F ad F D, & componendo D G ad G I eſt, vt eadem G D ad D F; ideoque I G aqualis eſt D F, ſeu A C ſemierecto; igitur B I eſt breuißima. 8. huius.

Poſtea ducto quolibet ramo E K ſupra breuiſecantem E B (in prima figura, & infra in ſecunda) occurrente axi in R, & ducta K M perpendiculari ad axim, qua cum ſecet in M, & tangentem O B in P. Quoniam (vt dictum eſt) O F ſecatur bifariam

 in G,

in G, & non bifariam in M, ergo (ex lemmate sexto huius libri) G O ad O M, seu G B ad P M (propter similitudinem triangulorum B G O, & P M O) & multo magis G B ad illius portionem K M habebit maiorem proportionem, quàm M F, ad F G;
Lem. 5. præmis. *ideoque rectangulum K M F sub intermedijs contentum minus erit rectangulo B G F contento sub extremis nō proportionalium; sed rectangulum B G F aquale est rectangulo E D F (propterea quod D F, ad F G erat, vt B G ad H, seu ad ei aequalem E D)*
Lem. 5 præmis. *igitur rectangulum K M F minus erit rectangulo E D F, & propterea E D ad K M, seu D R ad R M (propter similitudinem triangulorum E D R, K M R) maiorem rationem habebit, quàm M F ad F D, & componendo, eadem D M maiorem rationem habebit ad R M, quàm ad F D, & propterea R M minor erit, quàm F D, seu quàm*
ex 8. 13. huius. *A C; igitur minimus ramorum ex K ad axim cadentium fertur infra K R; Quapropter ramus E K supra, vel infra breuisecantem E B ad sectionem ductus non est breuisecans, & abscindit ex axi segmentum A R minus, quàm abscindat breuissima ex K ad axim ducta, quod erat ostendendum.*

Tertio loco sit E D minor, quàm H, & ostendetur, &c. *Quia H ad B G est, vt G F ad F D, estque E D minor, quàm H; ergo E D ad B G minorem proportionem* h
Lem. 5. præmis. *habet, quàm G F ad F D; & ideo rectangulum E D F sub extremis contentum minus est rectangulo B G F, quod sub intermedijs continetur; ponatur iam rectangulum T G F aquale rectangulo E D F, & per F ducatur F V perpendicularis super axim A D.*



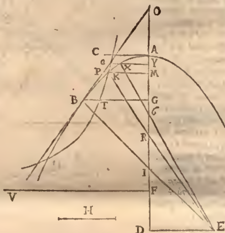
Et componendo, patet, quod D F est æqualis R M, &c. *Nam D R ad R M est, vt M F ad F D, & componendo, eadem D M ad R M, atque ad D F, seu ad semierectum A C candem proportionem habebit, & ideo D F est aqualis R M.* i

Et

k Et similiter patebit, quod L S sit breuissima, &c. *Secundus casus absque vllo labore ostensus erit ijsdem verbis, & caracteribus, quibus casus primus expositus fuit, si inspiciatur secunda figura.*

l Et cum B I intercipiatur inter illas patebit etiam, &c. *Et cum B I intercipiatur inter duos ramos breuisecantes E K, qui ducuntur ex punctis K, in quibus hyperbole K T L secat parabolen A B L, cadet punctum T hyperboles intra parabolen; quare rectangulum B G F maius erit rectangulo T G F, seu K M F, quod aequale est rectangulo E D F, vt dictum est, quare E D ad B G, seu D I ad I G (propter similitudinem triangulorum E D I, B G I) habebit minorem proportionem, quàm G F ad F D, & componendo, eadem D G ad G I minorem proportionem habebit, quàm ad F D, siue ad A C, & ideo I G maior erit, quàm A C.* Lem. 5. præmiss.

m Deinde ex concursu E ad sectionem, &c. *Deinde ex concursu E ad sectionem A B parabolen educantur duo rami E X supra breuisecantem E K in prima figura, & infra eamdem in figura secunda, & ex punctis X ducantur duae X T perpendiculares ad axim, secantes axim in Y, & hyperbolen K T in a existẽte extra parabolen; cumque dua recta a Y, necnõ T G parallelae sint cõtinenti F V, & interponãtur inter hyperbolẽ K T, & reliquã continentem F A erit rectangulum a Y F aequale rectangulo T G F, quod factum est aequale rectangulo E D F, estque X Y portio ipsius a Y; igitur rectangulum E D F maius erit rectangulo X Y F, & ideo E D ad X Y, seu D b, ad b Y (propter similitudinem triangulorum E D b, X Y b) maiorem rationem habet, quàm Y F ad F D, & componendo eadem D Y ad Y b maiorem proportionem habebit, quàm ad D F, seu C A.* 12. lib. 2. Lem. 5. præmiss.



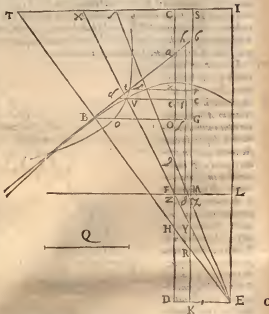
n Simili modo demonstrabitur, &c. *Absque noua demonstratione propositum ostendetur inspiciendo secundam figuram.*

Notæ in Propos. LII. LIII.

a Dico, quod rami egredientes ex E habent superiùs expositas proprietates, &c. *Idest easdem, quas habent rami in parabola educti iuxta comparationem perpendicularis E D ad Trutinam.*

Et

Et ponamus quamlibet duarum proportionum CF ad FD, & IS ad SC, vt proportio figuræ, & educamus ex E, S, &c. *Idest fiat distantia ex centro vsque ad perpendicularem E D ad eius portionem D F in hyperbola, vt summa lateris transuersi, & recti ad latus rectum, & vt eorum differentia in ellipsi ad latus rectum ita fiat C D ad eius productionem D F; tunc enim C F ad F D diuidendo in hyperbola, & componendo in ellipsi habebit eandem proportionem, quàm latus transuersum ad rectum; pariterq; fiat E K ad K D in eadē proportione figuræ, & ex E, K educamus rectas E I, K S parallelas axi A C D, secantes I C, & L F parallelas ipsi E D in I, S, L, & M. Immutaui postremā partem constructionis, vt manifestè erroneā in textu Arabico; Si enim I C ad libitum sumpta secatur in S in ratione C F ad F D non cadet necessariò E L parallela C D super punctum I.* b



Et interponamus inter F C, C A duas C N, C O proportionales illis duabus, &c. *Textum corruptum sic restituo: Interponamus inter F C, & A C duas medias proportionales, itaut F C, N C, C O, C A sint continuè proportionales, quod fieri posse constat ex lemmate 7. huius libri.* c

Et ponamus proportionem lineæ alicuius, vt est Q compositam, &c. *Vocatur Trutina in hyperbola, & ellipsi linea recta Q, quæ ad B O compositam proportionem habet ex C D ad D F, & ex ratione F O ad O C.* d

Producatur priùs E B secans axim in H, &c. *Producatur priùs E B secans axim in H, & rectam S K in R, nec non rectam I C in puncto T.* e

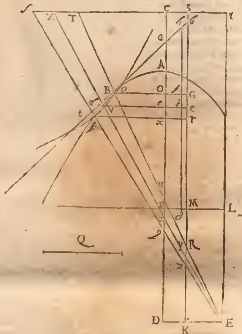
Ergo E D ad B O, quæ componitur ex E D ad D K, &c. *Nam posita intermedia D K, proportio E D ad B O composita erit ex ratione E D ad D K, & ex ratione D K ad B O; est verò I C ad C S, vt E D ad D K (propter parallelas I E, S K, C D) atque D K est æqualis G O in parallelogrammo G D; ergo proportio E D ad B O componitur ex ratione I C ad C S, & ex ratione G O ad O B.* f

Sed E D ad D K est, vt C D ad D F, quia quælibet earum vt proportio figuræ g

figuræ compositæ, vel diuisæ, &c. *Quia E K ad K D, atque C F ad F D eandem proportionem habebant, quàm latus transuersum ad rectum; ergo componendo in hyperbola, & diuidendo in ellipsi erit E D ad D K, vt C D ad D F.*

h Et ponamus rectangulum F G cõmune, &c. *Scilicet rectangulũ F G addatur in hyperbola, & auferatur communiter in ellipsi.*

i Et propterea E K ad B G, nempe K R ad R G, &c. *Quia propter similitudinem triangulorum E K R, & B G R erit E K ad B G, vt K R ad R G; quare K R ad R G maiorem proportionẽ habet, quàm G M ad M K; & componendo K G ad G R maiorem rationem habet, quam eadem G K ad K M, quare K M, nẽpe c i æqualis D F maior est, quàm G R.*



k Et auferẽdo homologũ ab homologo in hyperbola, & coniungendo *e a* in ellipsi, habebit, &c. *Scilicet comparando homologorum differentias in hyperbola, eorundem summas in ellipsi, idest C T ad B O, nempe C H ad H O (propter similitudinem triangulorum C H T, & O H B) habebit maiorem proportionem, quàm I C ad C S, nempe C D ad D F.* Lem. 4. præmis.

l Postea educamus ex E lineam occurrentem sectioni in V, &c. *Educamus ex E lineam occurrentem sectioni in V, quæ secet axim in Z, & S M in T.*

m Et per *f* producamus *f g h* parallelam axi A D, &c. *Et per* f *ducamus* f g *parallelam axi A D, quæ secet tangentem B a in* h, *& L F in* g, *atque V* c *secet illam in* i, *& S M in* c.

n Et ponamus rectangulum F *f* communiter, &c. *Et communiter addamus in hyperbola, & auferamus in ellipsi rectangulum F* f, *fiet rectangulum B* f g *æquale rectangulo* g *F C. Nomina Inuersi, & Trutinatæ definita fuerunt in primo libro ab interprete Arabico.*

Igitur

o

Igitur C *a* eſt linea quinta proportionalis aliarum quatuor, &c. *Quia poſitæ fuerunt quatuor rectæ lineæ F C, N C, O C, C A continuè proportionales, eſtque C A ad C* a, *vt*
37. lib. 1. *O C ad C A; ergò prima F C ad tertiam O C eamdem proportionem habet, quàm O C ad quintam C* a *continuè proportionalium, quare comparando homologorũ*
Lem. 4. præmiſſ. *differentias F O ad O* a *eſt, vt F C ad C O; ſed facta fuit vt F O, ad O C, ita* f *O ad O B; ergo componendo in hyperbola, & comparando differentias terminorũ*
Lem. 2. præm. *ad conſequentes in ellipſi, eſt F C ad C O, ſeu F O ad O* a, *vt* f *B ad B O; nempe vt* f h *ad eandem O* a, *propter ſimilitudinẽ triangulorum B* f h, *& B O* a; *& ideo F O, &* f h *æquales ſunt.*

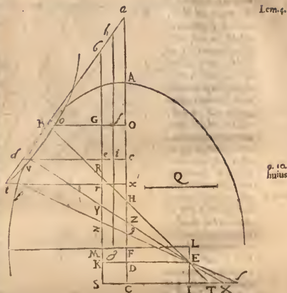
Et propterea *f i* ad *i h* maiorem proportionem habet, quàm ad *f g*, &c. *Quia F O, ſeu* g f *oſtenſa fuit æqualis* f h *erit* g h *ſecta biſariam in* f, *& non biſariam in* i *propterea (ex lemmate ſexto huius lib.) habebit* f h *ad* i h, *ſcilicet B* f *ad* d i *(propter ſimilitudinem triangulorum B* f h, d i h*) maiorem proportionem, quàm* i g *ad* g f, *ſed B* f *ad V* i *portionem ipſius* d i *habet maiorem proportionem, quàm ad*
Lem. 5. d i; *ergo B* f *ad V* i *habet maiorem proportionem, quàm* i g *ad* g f, *ergo rectangulum*
In nota literę n præm. *B* f g, *nempe rectangulum* g *C (quod eſt oſtenſum ei æquale) maius eſt rectangulo V* i g. p

Et ponamus rectangulum *g e* commune, &c. *Et addamus in hyperbola, & auferamus in ellipſi rectangulum* g e *communiter.* q

Et propterea E K ad *e* V, nempe K ad Y *e*, &c. *Sunt enim triangula E K Y, & V* e *Y ſimilia, ergo E K ad* e *V eſt, vt K Y ad Y* e, *quarè K Y ad Y* e *maiorem proportionem habet, quàm* e *M ad M K, & componendo, eadem K* e *maiorem proportionem habet ad* e *Y, quàm ad M K, ſeu ad F D; vnde patet, quod* e *Y minor ſit, quam F D.* r

Et conſtat quemadmodum antea demonſtrauimus, &c. *Quoniam* e *Y minor oſtenſa eſt, quam K M ergo eadem E I ad Y* e, *ſeu I X ad V* e *(propter ſimilitudinem triangulorum E I X, Y* e *V) maiorem proportionem habebit, quàm E I ad M K, ſeu I C ad C S, vel ad ei æqualem* c e; *igitur comparando homologorum ſummas* ſ

mas in ellipsi, & eorundem differentiás in hyperbola C X ad c V, vel (propter similitudinem triãgulorum X C Z, V c Z) C Z ad Z c maiorem proportionem habet, quàm I C ad C S, vel C D ad D F; & componendo in ellipsi, & diuidendo in hyperbola C c ad c Z maiorẽ proportionem habebit, quàm C F ad F D, & ideo breuissima egrediens ex V abscindit lineã maiorem, quàm A Z. Lem.4.



9. 10. huius.

t Simili modo cõstat, quod breuissima egrediens ex *l* eiusdem sit rationis, &c. *Absque noua demonstratione in secunda, & quarta figura propositum ostensum erit.*

a Deinde sit E D æqualis Q, inde demonstrabitur (quemadmodum supra factum est) quod B H tantum sit linea breuissima, &c.

Secunda pars huius propositionis, quam Apollonius non exposuit hac ratione suppleri potest.

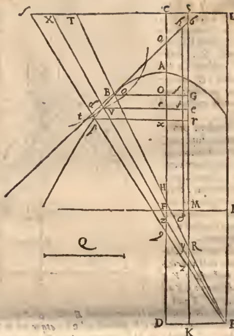
Sit E D aqualis Trutina Q, habebunt E D, atque Q eandem proportionem ad B O, componitur verò proportio E D ad B O ex rationibus E D ad D K, & D K ad B O, seu O G ad B O; componebatur autem proportio Trutina Q ad B O ex rationibus C D ad D F, & F O ad O C; ergo ablata communiter proportione E D ad D K, vel C D ad D F, relinquetur proportio G O ad O B eadem proportioni F O ad O C; ergo rectangulum G O C sub extremis contentum aquale erit rectangulo B O F sub intermedijs comprahenso, addatur in hyperbola, & auferatur in ellipsi communiter rectangulum F G, erit rectangulum F S aquale rectangulo B G M; Et quia I S ad S C, vel E K ad K D, vel ad F M erat, vt C F ad F D, vel vt S M ad M K; ergo rectangulum E M aquale est rectangulo F S; & propterea rectangulum E M aquale erit rectangulo B G M; quapropter vt E K ad B G, seu K R ad R G, ita erit G M ad M K, & componendo, eadem

KG eandem proportionem habebit ad RG, atque ad MK, 4 vnde RG æqualis erit MK, vel FD, quare eadem EI ad KM, vel CD ad DF, siue IC ad CS eandem proportionem habebit, quam eadem EI ad RG, vel IT ad BG (propter similitudinem triangulorum IET, & GRB) ergo comparando homologorum summas in ellipsi, vel differentias (Lem. 4.) in hyperbola CT ad BO, vel CH ad HO (propter similitudinem triangulorum CHT, & OHB) eandem proportionẽ habebit, quàm IC ad CS, vel CD ad DF, & diuidendo in hyperbola, & cõponendo in ellipsi CO ad OH eandem proportionem habebit, quàm CF ad FD, siue quàm habet latus transuersum ad rectum; & propterea BH est breuissima (9. 10. huius.) linearum ex B ad axim cadentium.

Deinde educatur quilibet ramus EV supra, vel infra breuisecantem EB, qui productus secet rectam IC in X, & CA in Z, atque SM in Y, & educatur ex V recta V c perpendicularis ad axim, secans DF in c, & SM in e, atque contingentem sectionem in puncto B, scilicet ipsam B a secet in d. Et quia (vt modo ostensum est) rectangulum FS æquale est rectangulo BGM, suntque pariter ostensa OC, AC, Ca proportionales; ergo Ca est quinta proportionalis post quatuor præcedentes FC, NC, OC, AC continuè proportionales; & ideo FC ad
Lem. 3. CO est, vt CO ad Ca; ergo comparando homologorum differentias tam in hyperbola, quàm in ellipsi erit, FO ad Oa, vt FC ad CO: est autem GB ad BO, vt FC ad CO, vt antea ostensum est; ergo GB ad BO erit, vt FO ad Oa; sed propter similitudinem triangulorum BGb, BOa est GB ad BO, vt Gb ad Oa; ergo FO, seu MG ad Oa eandem proportionem habet, quàm Gb ad eandem Oa; & propterea MG æqualis est Gb; cumque Mb secetur æqualiter in G, & inæqualiter in e (ex lemmate 6. huius) Gb ad eb, seu BG, ad de, propter similitudinem triangulorum BGb, & BOa, & multo magis BG ad V e portionem ipsius de habebit maiorem proportionem, quàm eM ad GM; ergo rectangulum

BGM

BG M sub extremis cōtentum maius erit rectāgulo V c M sub medijs comprahenso; erat autem prius rectangulum B G M æquale rectangulo E M; ergo rectangulū E M maius est rectangulo V c M, & propterea E K ad V c, seu K T ad T c (propter similitudinem triangulorum E T K, & V c T) maiorem proportionem habebit, quàm c M ad M K, & componendo, eadem K c ad T c maiorem proportionem habebit, quàm ad M K; ergo T c minor est, quàm M K, quare E I ad T c, seu I X ad c V (propter similitudinem triangulorum I E X, c T V) habebit maiorem proportionem, quàm eadem Lem. 5.



Lem. 5.

E I ad M K, seu I C ad C S, vel ad c c; & propterea comparando homologorum summas in ellipsi, & earundem differentias in hyperbola C X ad c V, vel C Z ad Z c (propter similitudinem triangulorum C Z X, V c Z) maiorem proportionem habebit, quàm S K, ad K M, seu C D ad D F, & diuidendo in hyperbola, & componendo in ellipsi C c ad c Z habebit maiorem proportionem, quàm C F ad F D, seu quàm latus transuersum ad rectum, & propterea breuissima linearum cadentium ex puncto V ad axim abscindet segmentum maius, quàm A Z, & ramus E V non erit breuisecans, quod fuerat ostendendum. Lem. 4. ex 9. 10. huius.

b Et demonstrabitur, quemadmodum dictum est, quod G O ad B O minorem proportionem habet, quàm F O ad O C, &c. *Nam proportio E D ad B O componitur ex rationibus E D ad D K, & D K, seu G O ad B O. Pariterque proportio Trutinæ Q, quæ erat maior quàm E D ad B O componitur ex rationibus C D ad D F, & F O ad O C, auferatur communis proportio E D ad D K, vel C D ad D F, remanet proportio G O ad O B minor proportione F O ad O C.*

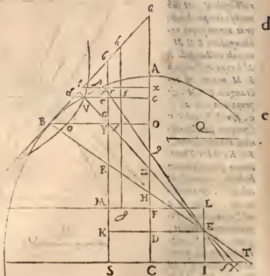
c Et producamus ex V, *l* duas perpendiculares V *e*, *l* P, quæ, &c. *Et producamus ex V, & V duas perpendiculares V e, quæ parallelæ sint continenti F M, & secent reliquas lineas in signis antea expositis; Rectangulum ergo V c in c*

in c M æquale est rectangulo V c M, alterius figuræ, &c.

Et ponamus rectangulum F G cõmune, &c. *Scilicet, addatur in hyperbola, & auferatur in ellipsi communiter rectangulũ F G.*

Tandem prosequamur superiorẽ demonstrationem, vt ostendatur veritas reliquarũ propositionum, &c.

Demonstratio ab Apollonio breuitatis gratia neglecta sic perficietur.



Quoniam rectãgulum E M æquale est rectangulo V c M, igitur vt E K ad V c, seu K T ad T c (propter similitudinem triangulorum E K T, & V c T) ita erit c M ad M K, & componendo, eadem c K habebit ad c T, atque ad M K eandem proportionem, ideoque c T æqualis est M K; quare E I ad K M, seu I C ad C S eandem proportionem habebit, quàm E I ad c T, seu quàm I X ad c V (propter similitudinem triangulorum I E X, & c T V) quare comparando homologorum differentias

Lem. 3. *in hyperbola, & eorundem summas in ellipsi C X ad c V, vel C Z ad Z c (propter similitudinem triangulorum C Z X, c Z V) habebit eandem proportionem, quàm I C ad C S, vel C D ad D F, & diuidendo in hyperbola, & componendo in ellipsi C c ad c Z eandem proportionem habebit, quàm C F ad F D, seu quàm habet latus*

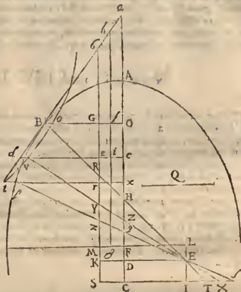
9. 10. huius. *transuersum ad rectum, & propterea recta linea V Z est breuissima omnium, quæ ex V ad axim A D duci possunt.*

Iisdem prorsus verbis ostensum erit, quod recta linea l m sit breuissima omnium cadentium ex puncto l ad axim, si nimirum apponãtur caracteres prioris casus, vt patet in secunda, & quarta figura.

Iisdem positis ostendendum est, ramum B E, interceptum inter duos breuisecantes E V, non esse breuisecantem, atque lineam breuissimam ex B ad axim A D extensam cadere supra ramum B E versus verticem A.

Quoniam rectangulum B G M maius est rectangulo O G M, atque ostensum fuit rectangulum E M æquale rectangulo O G M; ergo rectangulum B G M maius est

Lem. 5. *rectangulo E M, & propterea E K ad B G, seu K R ad R G (propter similitudinem triangulorum) minorem proportionem habet, quàm G M ad M K, & componendo*



ponendo eadem K G ad G R minorē proportionem habebit, quā ad K M, & propterea G R maior erit, quàm K M, vnde E I ad G R, seu I T ad G B (propter similitudinem triangulorum E I T, R G B) minorem proportionem habet, quàm E I ad K M, seu I C ad C S; & ideo comparando homologorū summas in ellipsi, & eorundem differentias in hyperbola C T ad O B, siue C H ad H O (propter similitudinem triangulorū) habebit minorē proportionem, quàm I C ad C S, vel C D ad D F, & diuidendo in hyperbola, & componendo in ellipsi C O ad O H habebit minorem proportionem, quàm C F ad F D, siue quàm latus transuersum habet ad rectum; ergo breuissima ex B ad axim ducta eum secat supra punctum H, & abscindit lineam minorem, quàm A H. Ex 9. 10. huius. Lem. 4.

Rursus iisdem positis, ostendendum est, ramum E p cadentem supra ramum E V versus verticem, vel infra infimum breuisecantem E V non esse breuisecantem, & abscindere ex axi minorem lineam, quàm abscindit breuissima ex puncto p ad axim ducta. Ducatur ex p recta linea p x perpendicularis ad axim, eum secans in x, & secans S M in r, & hyperbolen V o in t, pariterque ramus E p secet S M in z, & A F in q, atque I C in ſ. Quoniam hyperbole V o secat conisectionem A B in V, & p ponitur supra V ad partes A; ergo t cadit extra sectionem A B, & propterea t r maior erit, quàm p r; vnde rectangulum p r M minus erit rectangulo t r M; sed propter asymptotos S M, M F est rectangulum t r M æquale rectangulo o G M, seu rectangulo E M, vt dictum est; ergo rectangulum p r M minus est rectangulo E K M, & propterea E K ad p r, seu K z ad z r (propter similitudinem triangulorum) maiorem proportionem habet, quàm r M ad M K, & componendo, eadē K r ad r z maiorē proportionē habet, quàm ad M K; ergo r z minor est, quàm M K; ideoque E I ad r z, seu I ſ ad r p (propter similitudinem triangulorum E I ſ, & r p z) maiorem proportionem habet, quàm E I ad M K, seu I C ad C S, vel ad r x; ergo comparando homologorum summas in ellipsi, & eorundem differentias in hyperbola C ſ ad x p, 12. lib. 2. Lem. 5. Lem. 4.

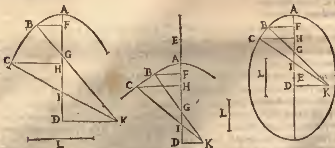
siue

siue C q ad q x (propter similitudinem triangulorum) maiorem proportionem habebit, quàm I C ad C S, vel C D ad D F, & diuidendo in hyperbola, & componendo in ellipsi, C x ad x q maiorem proportionem habebit, quàm C F ad F D, siue quàm latus transuersum ad rectum, quapropter breuissima ex p ad axim Ex 9. 10. huius. *ducta secat maiorem lineam, quàm A q. Quæ omnia ostendenda fuerant.*

Notæ in Propos. LIV. LV.

ITaque ostensum est, vti memorauimus, quod ex concursu duarum breuissimarum ad illam sectionem non egrediatur alia breuisecans præter illas duas, & quod reliqui rami ex eorum concursu educti ad sectionem habent proprietates superius expositas. a

Sensum germanum huius consectary, in quo duæ propositiones Apollonij continentur, non est facile diuinare in tanta Apollonij breuitate, & textus Arabici insigni corruptione; videtur enim recensere, & recolligere conclusionem quamdam præcedentium propositionum: at hoc fieri nullo modo debebat in duabus propositionibus 44. & 45. Rursus si theoremata sunt, demonstrari non poterant ante propositiones 51. 52. 53; sed forsan numeri Arabici non 44. & 45; sed 54. & 55. esse debent, quod mirum non est, cum numeri passim in hoc codice Arabico deformati reperiantur. Itaque in hac ambiguitate suspicor, textum sic restitui posse.



PROP. 5. Addit. *Si in coni sectione duæ breuisecantes ductæ fuerint ab eorum concursu, nullus alius ramus ductus erit breuisecans: Et ramorum ab eodem concursu extensorum, qui inter breuisecantes intercipiuntur, abscindunt axis segmenta maiora, & qui non intercipiuntur, minora, quàm abscindant lineæ breuissimæ ab eorum terminis ad axim ductæ: oportet autem in ellipsi, vt duo rami, & perpendicularis cadant inter axis maioris verticem, & centrum sectionis.*

Sit

Sit conisectio A B C, cuius axis A D, & in hyperbola, & ellipsi centrum E; & sumantur qualibet duo puncta B, & C, qua in ellipsi sint in eodem eius quadrante, & ducantur B F, C H perpendiculares ad axim; & in parabola fiant F G, & H I aquales semissi lateris recti; at in hyperbola, & ellipsi fiat E F ad F G, nec non E H ad H I, vt latus transuersum ad rectum, coniunganturq; recta B G, & C I. Manifestum est B G, & C I esse lineas breuissimas, qua si producantur vltra axim (ex 28. propositione huius libri) conuenient alicubi, vt in K. Dico, quod ex concursu K nullus alius ramus breuisecans duci potest ad sectionem A B C. Extendatur ex K super axim A D perpendicularis K D, & reperiatur sectionis Trutina L compescens mensura A D ipsius concursus K, vt in propositionibus 51. & 52. pracipitur. Et certè perpendicularis K D non erit maior, quàm L, aliàs duci non posset ramus vllus breuisecans ex concursu K ad sectionem A B C, quod est falsum; facti enim fuerunt K B, & K C breuisecantes; Similiter K D non erit aequalis Trutina L, quandoquidem tunc vnica tantummodo breuisecans ex K ad sectionem A B C duci posset, quod rursus falsum est, posita enim fuerunt dua breuisecantes; igitur perpendicularis K D necessario minor erit Trutina L, & ideo ex concursu K dua tantummodo breuisecantes ad sectionem A B C duci possunt, qua sunt B K, C K; & propterea nullus alius ramus breuisecans ex concursu K ad sectionem A B C duci potest prater duos K B, & K C; quod erat primo loco ostendendum. 8. 9. 10. huius. 51. 52. huius. 51. 52. huius.

Secundo iisdem positis, dico, quod rami ducti inter K B, & K C cadunt infra lineas breuissimas ab eorum terminis ad axim ductas, & quod rami producti ex K supra breuisecantem K B versus A verticem sectionis, vel infra ramum breuisecantem K C abscindunt axis segmenta ex vertice minora, quàm abscindant linea breuissima ab eorum terminis ad axim ducta. Reperiatur denuo Trutina L, ostendetur, vt prius perpendicularis K D minor, quàm L; & dua tantummodo breuisecantes K B, & K C; quare quilibet ramus ex K ad sectionis punctum, inter B, C positum extensus, secat segmentum axis ex vertice A maius quàm abscindat linea breuissima ab eius termino ad axim ducta: pariterque quilibet ramus ex K ad punctum sectionis supra B, positum, vel infra ramum K C extensus, abscindet segmentum axis ex A minus, quàm secet linea breuissima ab eius termino ad axim ducta; quod erat ostendendum. 51. 52. huius.

Notæ in Proposit. LVI.

a **R**Eperitur quidem in ramis aggregati secantis bifariam inclinatum, super quod non cadit perpendicularis, breuisecans vna tantum, quomodocumque se habeant perpendicularis, & mensura, &c.

Sensum huius propositionis nec Apollonius quidem si reuiuisceret insigni barbarie corruptum perciperet, censeo tamen, sic restitui debere.

In ellipsi ramorum secantium vtrumque axim à concursu vltra centrum posito egredientium, vnius tantùm portio inter axim maiorem, & sectionem intercepta erit linea breuissima; siue mensura ipsam comparatam, nec non perpendicularis ipsam Trutinam superet, aquet, vel ab ea deficiat.

Sit

Sit sectio ellipsis A C B transuersa A B, &c. *Lego; Sit sectio ellipsis A C B, & axis maior A B, centrum D, & perpendicularis E F secans axim in F inter centrũ ellipsis D, & verticem A.* b

Et ducamus per punctum E sectionẽ hyperbolicam E M C circa duas eius continentes, &c. *Ideſt circa duas asymptotos I L, I H per* c
12. & 13. lib. 2. *E describatur hyperbole E M C, quæ secet axim A B æquidistantem alteri asymptoton in aliquo puncto vt in M; ostendetur punctum M super ellipsis centrum D cadere.*

Ergo E H prima in proportione in I H subsequentem, nempe G F subsequens ipsam M G quartam, æquale est subsequenti D G secundæ in I G nempe F H tertiam. Ergo punctum N, &c. *Textus corruptus sic restitui posse censeo; Ergo E H prima proportionalium in H I, nempe G F quartam æquale est D G secundæ in I G, nempe F H tertiam, &c. Propterea quod E H ad F H, atque D G ad G F posita fuerunt, vt latus transuersum ad rectum; ergo rectangulum sub D G, & H F, seu I G, extremis quatuor proportionalium, æquale est rectangulo sub intermedijs E H, & F G, seu H I, estque punctum E in hyperbola E M C cuius asymptoti K I, L I; ergo punctum D in eadem hyperbola existit; sed erat prius in ellipsis diametro A B, scilicet in centro; quare in eorum communi sectione existet: erat autem punctum M communis sectio hyperboles E C, & axis ellipsis A B; igitur puncta M, & D coincidunt, & hyperbole E D C* d
8. lib. 1. *transit per centrũ sectionis ellipticæ A C B, & ideo hyperbole E D C, quæ in infinitũ extendi, & dilatari potest necessario secabit finitam ellipsim alicubi, vt in C.*

Et producamus per E C lineam, &c. *Et producamus per E C rectam lineam, quæ occurrat continentibus in L, K, & secet axim ellipsis in P.* e

Erit G F æqualis O N, quare F O, &c. *Quia duæ rectæ lineæ A O, L K* f
secantur à parallelis I L, F E, C N, K O proportionaliter, & sunt K C, L E
8. lib. 2. *æquales, ergo O N, F G inter se æquales erunt, & addita communiter N F erit F O æqualis N G; Et quoniam E H ad H F est vt E K ad K P (propter parallelas K I, O A) nempe vt F O, seu ei æqualis G N ad O P (propter parallelas E F, O K) sed eandem proportionẽ habet D G ad G F, quàm E H ad H F; ergo G N ad O P eandem proportionem habet quàm D G ad G F, & compa-*
Lem. 3. *rando homologorum differentias D N ad N P erit vt D G ad G F, seu vt latus*
10. huius. *transuersum ad rectum; & ideo C P est breuissima.*

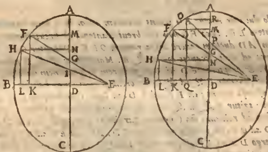
Quia in sequenti propositione 57; & in alijs adhibetur propositio non adhuc demonstrata; nimirum posita C P linea breuissima, pariterque I D semissi axis recti minoris etiam breuissima (ex 11. huius) quæ occurrant vltra axim in M deducuntur ea omnia, quæ in propositionibus 51. & 52. ex hypothesi omnino diuer-

ne diuersa eliciebantur; nam in dictis propositionibus perpendicularis ex concursu ad axim ducta efficiebat in ellipsi mensuram (iuxta definitionem 15. huius libri) minorem medietate axis transuersi, idest perpendicularis ex concursu cadebat inter centrum sectionis, & proximiorem verticem: hic vero perpendicularis ex concursu M per centrum D ellipsis transit.

Animaduertendum est hoc theorema demonstratum fuisse ab Apollonio Propos. 35. huius libri, quod tamen paraphrastes nescio an iure in fine huius voluminis transposuit; Sed quia predicta propositio 35. omnino hic est necessaria, & pendet ex alijs præcedentibus, libuit potius aliam independentem demonstrationem afferre quam ordinem propositionum satis alteratum denuo perturbare.

LEMMA VIII.

IN ellipsi ABC linea breuissima F G, & semiaxis minor rectus B D conueniant in E, erunt E F, & E B duæ breuisecantes, ducatur quilibet ramus E H inter eos: Dico E H non esse breuisecantem, & cadere infra lineam breuissimam ductam ex puncto H ad axim.

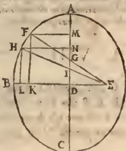


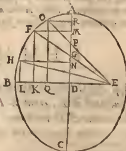
Ducantur ex F, & H rectæ F K, H L perpendiculares ad axim rectum B D eum secantes in K, & L, pariterque ducantur F M, H N perpendiculares ad axim transuersum A D eum secantes in M, N. Et quia F G est breuissima, ergo D M ad M G eandem proportionem habet, quàm latus transuersum C A ad eius latus rectum; sed propter parallelas D E, M F, est D M ad M G, vt E F ad F G, seu E K ad K D (propter parallelas G D, F K) quare E K ad K D eandem proportionem habet, quàm latus transuersum ad rectum, & diuidendo E D ad D K eandem proportionem habebit, quàm differentia lateris transuersi, & recti ad latus rectum, est vero D L maior, quàm D K (cum H L parallela ipsi F K cadat inter punctum K, & B) igitur E D ad maiorem D L minorem proportionem habet, quàm ad D K, & propterea componendo E L ad L D minorem proportionem habebit, quàm latus transuersum ad rectum: est vero E H ad H I, 15. huius.

H vt E L

vt E L ad L D (propter parallelas I D, H L) pariterque D N ad N I est, vt E H ad H I (porpter parallelas E D, N H) quare D N ad N I erit vt E L ad L D, & propterea D N ad N I minorem proportionem habebit, quàm latus transuersum C A ad eius latus rectum, & ideo linea breuissima ex puncto H ad axim A D ducta cadet supra ramum H I E versus verticem A, atq; E H non erit breuisecans, quod erat primo loco ostendendum.

10. huius.



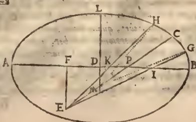


Secundo ducatur ramus E O secans maiorem axim in P inter verticem A, & breuisecantem E F; Dico E O non esse breuisecantem, & breuissimam ex puncto O ad axim A D ductam cadere infra ramum O P E; Ducantur O Q, O R perpendiculares ad axes, secantes eos in Q, R. Manifestum est Q D minorem esse, quàm K D, & propterea E D ad D Q maiorem proportionem habebit, quàm ad D K, & componendo E Q ad Q D maiorem proportionem habebit, quàm E K ad K D: ostensa autem fuit E K ad K D, vt latus transuersum C A ad eius latus rectum; igitur E Q ad Q D maiorem proportionem habebit, quàm latus transuersum ad rectum; sed (propter parallelas P D, O Q) vt E Q ad Q D ita est E O ad O P, & propter parallelas E D, R O, vt E O ad O P, ita est D R ad R P; ergo D R ad R P est, vt E Q ad Q D, & propterea D R ad R P maiorem proportionem habebit, quàm latus transuersum C A ad eius latus rectum; igitur E O non erit breuisecans, & breuissima ex puncto O ad axim ducta cadit infra ramum E O versus D, quod erat ostendendum.

ex 10. huius.

Notæ in Propos. LVII.

E T dico, quod non reperiatur vllus alius ramus, &c. *Idest sit rursus linea breuissima C M, quæ producta concurrat cum perpendiculari E F in E, quæ secet axim in F vltra centrum D ad partes verticis A. Dico, quod præter ramum*



8

mum E C nullus alius ramus breuisecans ex concursu E ad sectionem duci potest, qui cadat in eodem quadrante B L, quem breuisecans intersecat.

h Nam si producantur E H, E G, &c: *Ducantur quilibet rami E H, E G ad vtrasque partes breuisecantis E C intra quadrantem B L, qui secent D B in K, & I, & producatur per centrum D recta M D L perpendicularis ad axim B A, quæ secet sectionem in L, & ramum E C in M.*

i Et quia iam productæ sunt ex concursu M duæ breuisecantes, &c. *Quia C M breuissima ex hypothesi occurrit semiaxi minori recto L D breuissimæ pariter (ex 11. huius) in M, sequitur (non quidem ex 51. 52. huius, sed ex lemmate 8. præmisso) quod linea recta ex M ad H coniuncta cadat infra breuissimam ex puncto H ad axim B A ductam, & coniuncta recta M G cadit supra breuissimam ex puncto G ad axim ductam.*

k Sed E H, & E G efficiunt abscissas opposito modo, &c. *Quia ab eodem puncto H sectionis ducuntur tres rectæ lineæ H E, H M, & breuissima ex H ad axim B A ducta, quarum intermedia est H M, eo quod breuissima ex H ad axim A B cadit supra H M ad partes B, vt dictum est, & H E cadit infra H M ad partes A; ergo H E cadit infra breuissimam ex H ad A B ductam, & propterea E H non erit breuisecans: Similiter breuissima ex G ad A B extensa cadit infra G M ad partes A, vt dictum est; at E G cadit supra G M ad partes B; ergo E G cadit supra breuissimam ex G ad axim A B ductam, quare E G non est breuisecans.* Lem 8. ibidem.



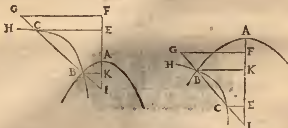
SECTIO NONA

Continens Propof. LVIII. LIX. LX. LXI. LXII. & LXIII.

IAm ex puncto dato C extra, vel intra sectionem AB (quod a
in axi I A non sit) possumus rectam lineam ducere, cuius portio intercepta inter sectionem, & axim sit linea breuissima.

PROPOSITIO LVIII.

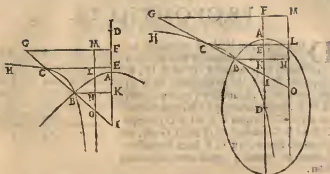
Sit sectio parabole, & producamus perpendicularem CE super I E A, & ponamus E F æqualem dimidio erecti, & du-
4. lib. 2. camus G F parallelam ipsi C E, & per C ducamus hyperbolen b
H C B circa duas continentes illam G F, I F, quæ occurrat sectioni A B in B, & per B, C producatur linea occurrens continenti I A in I, & continenti G F in G: Dico, quod B I est linea breuissima.



Producatur perpendicularis B K. Quoniam C I æqualis est B G (sexta c
8. lib. 2. ex secundo) erit E I æqualis K F, & E F, K I erunt æquales, atque supposita, est E F æqualis dimidio erecti; ergo K I ita est pariter; Quare B I est breuissima, (octaua ex quinto) & hoc erat probandum.

PROPOSITIO LIX. LXII. & LXIII.

DEinde sit sectio hyperbole, aut ellipsis, cuius centrum D, & lineis, a
atque signis in eodem statu manentibus, ponamus D F ad F E, & similiter



similiter C L ad L E, vt proportio figuræ, & producamus per L ipsam O M parallelam A I F, & per F ipsam G M parallelam C E, & faciamus sectionem H C B hyperbolen transeuntem per punctum C circa continentes G M, O M, quæ occurret sectioni A B (in ellipsi quidem vt demonstrauimus) in hyberbola vero eo quod O M parallela axi D A inclinato subtendit, si producatur, angulum subsequentem continentiæ angulum secabit A B, & corda, si producatur, occurret sectioni; Ergo O M ingreditur sectionem A B, & ampliatur sectio A B per extensionem longè à duabus lineis O M, M G, & sectio B C prope illas ducitur (decimosexta, ex secundo) igitur duæ sectiones A B, C B sibi occurrunt, vt in B, & ducamus per B, C lineam occurrentem D F A in I, & G F in G; Et quia B O æqualis est ipsi C G (octaua ex secundo) erit O N æqualis ipsi M L, & O L ipsi N M; ergo O L, nempe N M, seu K F ad E I est, vt C L ad C E, nempe D F ad D E, ergo K F ad E I est, vt D F ad E D comparando homologorum summas in hyperbola, & eorundem differentias in ellipsi, & iterum comparando antecedentes ad differentias terminorum fiet D K ad K I, vt D F ad F E, quæ est vt proportio figuræ; igitur B I est linea breuissima (9. 10. ex quinto) & hoc erat probandum.

b 4. lib. 2.

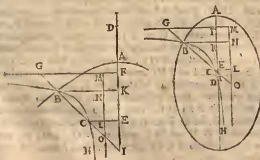
56. huius.

14. lib. 2.

c

d Lem. 3.

Lem. 1.



PROPOSITIO

PROPOSITIO LX.

DEinde perpendicularis egrediens ex C cadat ad centrum D sectionis A B hyperboles, & ponamus C E ad E D, vt proportio figuræ, & producamus ex E ad sectionem rectã lineam E B, quæ parallela sit D E, producaturque C B, quæ occurrat axi in G. Et quia C E ad E D, nempe C B ad B G, nempe D H ad H G est, vt proportio figuræ; erit G B linea breuissima (nona ex quinto) quod erat ostendendum. a b

PROPOSITIO LXI.

SIt postea punctum C, & perpendicularis C F, & F remotius à vertice sectionis, quàm sit centrum, & ponamus C E ad E F, vt est proportio figuræ, & similiter D G ad G F, & ex E producamus E H, quæ sit parallela ipsi F A, & ex G, D, ad illam G I, D K, quæ sint parallelæ ipsi C F; & ducamus sectionem hyperbolen transeuntem per D, quam

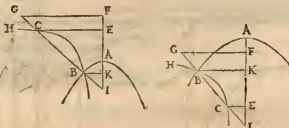
4 lib. 2. contineant I H, I G, quæ occurret sectioni A B similiter in B; Itaque per B, C producamus lineam, quæ occurrat axi F A in L, & ipsi E H in M. Dico, quod B L est linea breuissima. quia ducta perpendiculari H N, C E ad E F, seu ad K D, est vt D G ad G F, nempe vt K I ad I E, & propterea E C in E I erit æquale rectangulo D I subsequenti a b

12. lib. 2. (octaua ex secundo) nempe rectangulo B I consequenti; Ergo C E in E I est æquale B H in H I, & propterea B H ad C E, nempe H M ad M E est, vt E I ad I H; ergo H I, nempe N G æqualis est E M, & ideo L F ad E M, nempe ad N G est, vt C F ad E C, nempe D F ad D G, quia quælibet earum assignata est, vt proportio figuræ; ergo L F ad N G est, vt D F ad D G; itaq; comparando homologorum differentias L D ad D N, vt D F ad D G; & per conuersionem rationis, & posteà diuidendo D N ad N L erit, vt D G, ad G F, quæ est vt proportio figuræ; Ergo B L est linea breuissima (nona ex quinto) & hoc erat ostendendum.

Notæ

Notæ in Proposit. LVIII.

a IAm possumus producere ex puncto assignato C extra datam sectionem A B, aut intra (si punctum non fuerit ad axim I A) lineam diuidentem ex illo inter sectionem, & axim lineam breuissimam, &c. *Sic legendum puto. Ex puncto dato C extra, vel intra sectionem A B, quod in axi non sit, lineam rectam ducere, cuius portio intercepta inter sectionem, & axim sit linea breuissima.*



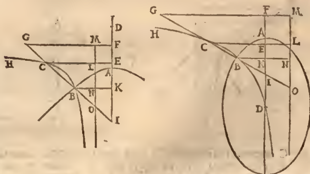
b Et per C ducamus sectionem H C B circa duas continentes illam G F, I F, quæ occurrat sectioni A B (16. ex 5.) in B, &c. *Scilicet ducamus per C hyperbolen H C B circa asymptotos G F, F I, & quia asymptoti, & hyperbole H C B producta ad se ipsas semper proprius accedunt, atque parabole A B producta semper magis ab axi A I remouetur; igitur hyperbole H C B, & parabola A B se mutuo secabunt; secent se se in puncto B. Animaduertendum est, quod in textu Arabico assumitur hæc conclusio, vt demonstrata in propositione 16. huius quinti libri; & siquidem numeri huius citationis mendosi non sunt, hæc propositio sexta decima desideratur in hoc libro.* 4. lib. 2. 14. 2. Ex 8. 1

c Producatur perpendicularis B K. Quoniam C I, &c. *Ex puncto B ad axim ducatur perpendicularis B K, secans eum in K; quoniam quando punctum C ponitur intra parabolen, tunc B G æqualis est I C; quando vero cadit extra, tunc C G est æqualis B I, & addita communi B C erit I C æqualis B G, cumq; duæ rectæ lineæ I G, I F conuenientes in I secentur à rectis lineis K B, E C, F G inter se parallelis, eo quod sunt perpendiculares ad eundem axim; ergo I G, & I F secantur in iisdem rationibus, & propterea E I æqualis erit K F; sicuti I C æqualis erat B G, pariterque I K æqualis erit E F, sicuti I B æqualis erat C G; posita autem fuit E F æqualis semierecto; igitur K I semissi lateris recti pariter æqualis erit.* 8. lib. 2.

Notæ

Notæ in Proposit. LIX. LXII. & LXIII.

a E T lineis, atque signis eodem statu manentibus, &c. *Idest punctum C extra, aut intra sectionem ponatur, dummodo non sit in axi, ducaturq; C E perpendicularis ad axim, secans eum in E, & vt latus transuersum ad rectum, ita fiat D F ad F E, atque C L ad L E, & per L producatur O L M parallela A I, & per F ducatur F M G parallela C E, quæ secet O M in M; & per*
4. lib. 2. *C describatur hyperbole H C B circa asymptotos G M O, quæ in ellipsi per eius centrum D transibit, & ideo eam secabit sicuti ostensum est in 56. huius.*



b Eò quod O M parallela axi D A inclinato subtendit, &c. *Quoniam in hyperbola O M parallela axi secat vtrãque linearum continentium angulum,*
11. lib. 2 *qui deinceps est ei, qui hyperbolen continet sectioni occurret; & producta sectionem A B secabit, & ideo O M cadit intra sectionem A B, atque hyperbole A B producta semper magis, ac magis recedit tum ab M O parallela axi, cum ab M*
14. lib. 2. *G parallela tangenti verticali, & sectio H C B, & asymptoti O M G ad se ipsas semper propius accedunt, igitur sectiones A B, B C conueniunt; secent se se in B, & ducamus per B, C lineam occurrentem axi in I, ipsi M O in O, & M G in G.*

c Et quia B O æqualis est ipsi C G, &c. *Cum linea recta O M, O G se secantes in O, secentur à parallelis E C, K B, F G proportionaliter, erit O N æqualis M L, sicuti O B æqualis erat C G, & O L, æqualis erit N M, sicuti*
8. lib. 2. *O C æqualis erat B G, cumque triangula O C L, & I C E sint similia propter parallelas O L, I E, erit O L ad E I, vt L C ad C E; est vero M N, seu F K æqualis ipsi L O, igitur F K ad E I est, vt L C ad E C, sed ex constructione erat D F ad F E, vt C L ad L E, scilicet vt latus transuersum ad*
Lem. 1. *rectum; ergo antecedentes ad summas terminorum in hyperbola, & ad*

eorumdem

eorundẽ differentias in ellipsi scilicet C L ad C E erit vt D F ad D E, & propterea K F ad E I erit, vt D F ad D E, & cõparando homologorum summas in hyperbola, & eorundem differentias in ellipsi, K D ad D I Lem. 3.

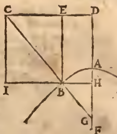
erit, vt D F ad D E, & iterum comparando antecedentes ad differentias terminorum fiet D K ad K I, vt D F ad F E, seu vt latus transuersum ad rectum; igitur B I est linea breuissima. Lem. 1. Ex 9. 10. huius.

d Si autem componamus proportionem in hyperbola deinde abscindamus, & reijciamus oppositum ab opposito in ellipsi, deinde inuertamus fiet K D ad K I, vt D F ad F E, &c. *Sed textum mendosum corrigi debere, vt supra factum est constat ex precedenti nota.*

Notæ in Proposit. LX.

a DEinde sit perpendicularis ex C, &c. *Si ex puncto C extra hyperbolen posito perpendicularis ad axim ducta ad centrum eius D pertingat, duci debet pariter ex puncto C recta linea ad sectionem, cuius portio inter axim D F, & sectionem A B sit linea breuissima; fiat C E ad E D, vt latus transuersum ad rectum, & ex E ducatur E B parallela axi, secans hyperbolen in B, & ex B ducatur B H perpendicularis ad axim, secans eum in H.*

b Et quia C E ad E D, nempe C B ad B G, &c. *Quia propter parallelas B E, F D est C E ad E D, vt C B ad B G, & propter parallelas D C, H B, est D H ad H G, vt C B ad B G, quare D H ad H G erit, vt C E ad E D: posita autem fuit C E ad E D, vt latus transuersum ad rectum; igitur D H ex centro hyperboles ad H G eandem proportionem habet, quàm latus transuersum ad rectum, & propterea G B erit linea breuissima.* 9. huius.



Notæ in Proposit. LXI.

a SIt postea punctum C, & perpendicularis C F, &c. *Si à puncto C extra hyperbolen A B posito, C F perpendicularis ad axim efficiat F A segmentũ transuersi axis maius semisse eius D A, & ponantur C E ad E F, atque D G*

I ad G F,

ad G F, vt latus tranuersum ad rectum, & ducatur ex E recta E H parallela F A, quæ secetur à rectis D K, G I ad axim perpendicularibus in K, & I, &
4. lib. 2. *per D ducatur hyperbole D B circa asymptotos H I G, occurret hyperbole A B (vt in Prop. 59. 62. 63. ostensum est) alicubi, vt in B, coniungatur recta linea B C, quæ occurrat axi in L, & ipsi E H in M, ducaturque ex B perpendicularis ad axim eum secans in N, & rectam E M in H. Dico, quod B L est linea breuissima.*

C E ad E F, nempe K D est, vt D G ad G F, &c. *Quoniam ex constru-* b
ctione C E ad E F, seu ad ei æqualem K D, in parallelogrammo D E, est vt D G ad G F, scilicet vt latus transuersum ad rectum, estque K I ad I E, vt D G ad G F propter parallelas D K, G I, F E; ergo vt prima C E ad secundam D K, ita est tertia K I ad quartam I E, & propterea rectangulum C E I sub extremis contentum æquale est rectangulo D K I sub intermedijs comprahenso; est vero rectangulum B I æquale rectangulo D I cum comprahendantur ab hyper-
12. lib. 2. *bole D B, & asymptotis H I G; ergo rectangulum C E I æquale est rectangulo B H I; & propterea B H ad C E, nempe H M ad M E (propter similitudinem triangulorum B H M, C E M) eandem proportionem habebit, quàm E I ad I H, & componendo eadem H E ad H I, atque ad E M eandem proportionem habebit; & ideo H I seu ei æqualis N G æqualis erit E M, quare eadem L F ad N G, atque ad E M eandem proportionem habebit: sed propter similitudinem triangulorum L C F, M C E est F C ad E C, vt F L ad M E, seu ad N G, & erat C E ad E F, necnon D G ad G F in eadem propor-*
Lem. 1. *tione lateris transuersi ad rectum, & summa terminorum ad antecedentes terminos, scilicet F C ad E C, necnon F D ad D G eandem proportionem habent; quare L F ad N G eandem proportionem habet, quàm F D ad D G, & compa-*
Lem. 3. *rando homologorum differentias L D ad D N eandem proportionem habebit, quàm F D ad D G, & comparando conse-*
Lem. 1. *quentes ad differentias terminorum D N ad L N erit, vt D G ad F G, scilicet vt latus transuersum ad rectum;*
9. huius. *quapropter B L est linea breuissima.*

SECTIO

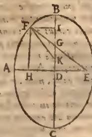
SECTIO DECIMA

Continens Propos. XXXXIV. XXXXV. Apollonij.

a SI ex axe recto ellipsis sumatur mensura ab origine, quæ ad semiaxim rectum non habeat minorem proportionem, quàm habet figura suæ transuersæ, tunc quicumque ramus secans, ab illa origine ad sectionem ductus, abscindit ex axe transuerso ad verticem sectionis lineam minorem ea, quàm abscindit linea breuissima egrediens ab eius termino in sectione posito ad transuersum axim; si vero fuerit proportio ad semirectum minor, tunc ramorum secantium vnus est breuisecans; reliqui vero, qui sequuntur extremum transuersæ habent proprietates superius expositas, & qui sequuntur extremitatem recti, secant ex transuersa lineam maiorem ea, quàm abscindit breuissima egrediens ab eius termino.

PROPOSITIO XXXXIV.

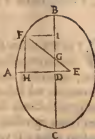
b Sit A D dimidium axis recti, & minoris sectionis ellipticæ A B C, & mensura A E, quæ sit maior, quàm A D, & proportio illius ad istam non sit minor proportione figuræ sectionis; Dico, quod linea breuissima egrediens ab extremitate cuiuscumque rami secantis educti ex E ad sectionem A B C, secat ex tranuersa B C cum vertice B, vel C lineam maiorem ea, quàm abscindit ille ramus.



c Ponatur ramus E F, & ducamus ex F ad vtrumque axim duas perpendiculares F H, F I. Et quia proportio E A ad A D non est minor proportione figuræ, sed minor est, quàm E H ad H D, nempe E F ad F G, seu D I ad I G, erit proportio figuræ minor, quàm D I ad I G, & ponamus D I ad I K, vt est proportio figuræ, & iungamus F K; erit ergo F K linea breuissima (10. ex 5.) & iam secat K B maiorem, quàm B G, & G F non erit breuissima; & hoc erat propositum. 10. huius.

 PROPOSITIO

PROPOSITIO XXXXV.

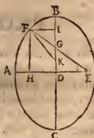


SI autem fuerit ratio E A ad A D minor, quàm proportio figuræ, ponamus E H ad H D in proportione figuræ, & producamus perpendicularem H F, & iungamus F E, & ducamus perpendicularem F I. Et quoniam E H ad H D, nempe D I ad I G est, vt proportio figuræ, erit F G linea breuissima (10. ex 5.) Et quoniam iam educti sunt ex E duo breuisecantes F E, & E A (11. ex 5.) tunc à terminis ramorum egredientium ex E, qui terminantur ad sectionem B F, linea breuissima egrediens erit remotior ab ipso B, & qui terminatur ad sectionem A F, breuissima egrediens ab extremitate illius erit proximior, ipsi B (51. 52. ex 5.) & hoc erat ostendendum.

a

b

Notæ in Propos. XXXXIV.



P*Vto, numeros 53. & 54. Propositionum huius sectionis mendosos esse, nam Propositio 53. posita fuit in præmissa sectione, & Propositio 54. inferius apposita reperitur; Censeo igitur, esse Propositiones XXXXIV. & XXXXV.*

Si ex axe recto ellipsis sumatur mensura, &c. *Hoc est si ex axe minori, recto ellipsis sumatur mensura, quæ habeat non minorem proportionem ad semiaxim rectum, quàm habet axis transuersus ad suum latus rectum, quilibet ramus secans, ab origine ad sectionem ductus, abscindit ex axe transuerso ad verticem sectionis minorem lineam, quàm secat linea breuissima ab eius termino ad axim transuersum ducta. Si vero mensura ad minorem semiaxim rectum proportionem minorem habuerit, quàm latus transuersum ad rectum, tunc vnicus ramus erit breuisecans; reliqui vero sequentes terminum transuersi, habent superius expositas proprietates, & sequentes extremitates axis recti, secant ex transuersa maiorem lineam, quàm secet breuissima ab eius termino ad axim transuersum ducta. Quod autem mensura necessario sumi debeat in axe minori ellipsis patet, nàm ex hypothesi rami sunt secantes non quidem ex concursu, sed ex origine ducti igitur origo cadit infra centrum, & mensura maior erit medietate axis vt in textu habetur; debet autem habere mensura ad semiaxim rectum maiorem aut eandem proportionem, quàm axis transuersus habet ad eius latus rectum, ergo proportio axis transuersi ad suum latus rectum erit maioris inæqualitatis, & propterea transuersus axis erit maior quàm axis rectus.*

a

Sit

b Sit A D dimidium axis recti sectionis ellipticæ A B C, &c. *Sit A D dimidium axis minoris, & recti ellipsis A B C, sitque mensura A E maior, quàm A D, & E A ad A D habeat maiorem, aut eandem proportionem, quàm habet latus transuersum B C ad eius rectum latus.*

c Ponatur ramus E F, & producamus ex F, &c. *Ducatur quilibet ramus secans E F, & ex F ad vtrumque axim perpendiculares F H, F I, quæ secent eos in H, & I. Et quia D H minor est, quàm D A, habebit eadem E D ad D H maiorem proportionem, quàm ad D A, & componendo E H ad H D, maiorem proportionem habebit, quàm E A ad A D; est vero E F ad F G, vt E H ad H D (propter parallelas D G, H F) nec non D I ad I G est, vt E F ad F G (propter parallelas E D, I F) ergo D I ad I G maiorem proportionem habet, quàm E A ad A D; habebat autem E A ad A D maiorem, aut eandem proportionem, quàm latus transuersum B C ad eius rectum latus; igitur D I ad I G maiorem proportionem habebit, quàm latus transuersum B C ad eius rectum latus: fiat iam D I ad I K, vt latus transuersum B C ad eius latus rectum, iungaturque F K, erit I K maior, quàm I G, & F K linea breuissima, quæ secat segmentum axis K B maius, quàm B G, vnde E F non erit breuiscans.* 10. huius.

Notæ in Propos. XLV.

a SI autem fuerit ratio E A ad A D minor, quàm proportio figuræ, &c. *Habeat E A ad A D minorẽ proportionem, quàm latus transuersum B C ad eius rectum latus, & fiat E H ad H D, vt latus transuersum ad rectum; habebit E H ad H D maiorem proportionem, quàm E A ad A D, & diuidendo eadem E D ad D H habebit maiorem proportionem, quàm ad D A; & propterea D H minor erit, quàm D A; vnde ex puncto H si eleuetur H F perpendicularis ad D A intra sectionem cadet, & secabit eam alicubi, vt in F: ducatur postea ex F recta F E, quæ secet axim in G, & F I perpendicularis ad axim B C eum secans in I. Et quoniam, propter parallelas G D, F H, est E F ad F G, vt E H ad H D, pariterque, propter parallelas E D, I F, est D I ad I G, vt E F ad F G, quare D I ad I G eandem proportionem habet, quàm E H ad H D, seu quàm latus transuersum B C ad eius latus rectum; & propterea F G est breuissima.* 10. huius.

b Et quoniam iam eductæ sunt ex E duæ breuisecantes, &c. *Textus Arabicus vsque ad finem propositionis est omnino corruptus, cum supponat propositionem non demonstratam, vt in propositione 56. notaui; Itaque, sic eum restitui posse censeo. Quoniam ex concursu E breuissimæ F G, & semiaxis recti minoris D A rami educti ad sectionem F A secant axis segmenta vsque ad verticem B maiora, quàm abscindant breuissimæ ab eorum terminis ad axim ductæ, scilicet breuissimæ cadunt supra ramos (ex Lemmate 8. præmisso) similiter rami ex concursu E ad sectionem B F ducti cadunt supra breuissimas ab eorum terminis ad axim extensas (ex eodem Lemmate 8.) & hoc erat ostendendum.*

SECTIO VNDECIMA

Continens Propof. LXVIII. LXIX. LXX. & LXXI. Apollonij.

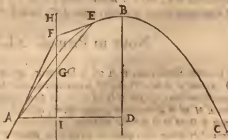
PROPOSITIO LXVIII. LXIX.

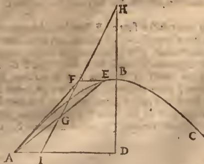
SI occurrant duæ tangentes alicui fectioni A B C, vt funt A F, E F, vtique quod abfcinditur ex tangente proximiori vertici fectionis, qui eft B minus eft fegmento abfciffo ex alia, nempe E F minor eft, quàm A F. a

Iuncta enim A E, & in parabola ex F producta linea F I parallela axi B D erit illa diameter, bifariam fecans E A in G (34. ex 2.) Similiter ex centro H producamus H F G, quæ eft quoque diameter (34. ex 2.) bifariam fecans E A in G, & ducamus A D in parabola, & hyperbola perpendicularem fuper axim D B. Ergo angulus A I G in parabola eft rectus, & in hyperbola obtufus; ergo F G A erit obtufus in illis omnibus; quare maior eft, quàm angulus F G E, & A G æqualis eft ipfi G E, & F G communis; igitur E F minor eft, quàm F A. b

30. lib. 2.

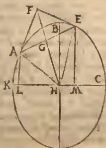
Ibidem.





PROP.

PROPOSITIO LXX.



POstea in ellipsi iungamus E H, A H, & C fit extremitas axis recti; erit A H minor
c quàm E H (11. ex 5.) & angulus E G H, nempe A G F maior erit, quàm A G H, seu E G F, ergo E F minor est, quàm F A, & hoc erat propositum.

PROPOSITIO LXXI.

d PAtet ex hoc, quod si producantur ex duobus punctis contactus in ellipsi perpendiculares E M, A L, & fuerit E M minor, exempli gratia, tunc tangens educta ab eius extremitate minor quoque est, quemadmodum demonstrauimus, & hoc erat ostendendum.

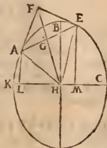
Notæ in Proposit. LXVIII. LXIX. LXX. & LXXI.

a SI occurrant duæ tangentes alicui sectioni A B C, aut circulo, vt sunt, &c. *Idest si conisectionem A B C contingant duæ rectæ A F, E F in punctis A, & E concurrentes in F, erit portio tangentis inter occursum, & contactum vertici B proximiorem intercepta, minor ea, quæ inter occursum, & remotiorem à vertice contactum continetur: oportet autem in ellipsi B verticem esse axis maioris. Expungo verba*, aut circulo, *tanquam erronea, & incaute ab aliquo textui superaddita. Circulum enim tangentes ab eodem puncto ductæ inæquales esse nequeunt.*

b Et ducamus A D in parabola, & hyperbola, &c. *Et ducamus A D in parabola, & hyperbola perpendicularem super axim B D, secantem eum in D, atque G F H in I; cumque in parabola diameter F G I sit parallela axi B D, erit angulus A I G rectus æqualis interno, & opposito ad easdem partes, angulo D; in hyperbola vero cum triangulum H D I sit rectangulum in D, erit externus A I G obtusus, estque in triangulo G I A angulus externus A G F maior interno, & opposito A I G, recto in parabola, & obtuso in hyperbola; erit quoque angulus F G A obtusus in parabola, & hyperbola.*

c Et angulus E G H, &c. *Quia F H est diameter secans bifariam E A in G; ergo triangula E G H, & A G H habent duo latera æqualia E G, A G, & G H, commune; estque H E, vertici B axis maioris ellipsis propinquior, maior* 30. ex 2. Com. *remotiore H A; ergo angulus E G H maior erit angulo A G H; estque angulus A G F æqualis E G H maiori, & E G F æqualis minori A G H; igitur angulus A G F maior est angulo E G F, & latera circa inæquales angulos sunt æqualia singula singulis, ergo tangens A F maior est, quàm E F.* 11. huius.

Patet

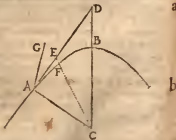


Patet ex hoc, quod si producantur ex duobus punctis contactus in ellipsi perpendiculares E M, A L; & fuerit E M minor, exempli gratia, tunc tangens educta ab eius extremitate, quæ est in sectione, minor quoque est, &c. *Si enim ex punctis E, A contactuum in ellipsi ducantur ad axim minorem K C perpendiculares E M, & A L secantes eum in M, & L, fueritque E M minor, quàm A L, tunc quidem punctum E magis recedit à vertice B axis maioris, quàm punctum A; & propterea, ex præmissa 70. huius libri, erit tangens E F minor, quàm A F. Expungo determinationem ab aliquo incaute additam* (quæ est in sectione) *manifestum enim est duci non posse contingentem ellipsim à perpendicularis termino M in axi minori posito, sed à termino E in sectionis peripheria constituto.* d

SECTIO DVODECIMA

Continens XXIX. XXX. XXXI. Propos. Appollonij.

QVælibet linea recta A E D tangens sectionem aliquam A F B in A extremitate lineæ breuissimæ A C est perpendicularis super illam, nẽpe D A C est angulus rectus. Et si fuerit perpendicularis super illam vtique tanget sectionem.



Alioquin producatur perpendicularis C E super A D, erit A C maior, quàm E C, ergo maior est, quàm F C; sed est minor, cũ sit minor, quàm C F, quod est absurdum. Igitur angulus D A C, est rectus, quod erat ostendendum. a

Si verò fuerit D. A C rectus, erit A D tangens, alioquin sit tangens A G; ergo C A G erit rectus, sed erat C A D rectus, quod est absurdum: ergo A D est tangens, & hoc erat probandum. b

Notæ

Notæ in Proposit. XXIX. XXX. & XXXI.

a ALioquin producatur perpendicularis C E, &c. *Existente C A linea breuissima, & A D tangente, si C A non est perpendicularis ad tangentem ducatur ex origine C recta C E perpendicularis ad tangentem A D, secans eam in E, & sectionem in F, erit in triangulo A C E angulus C A E acutus, & minor angulo recto E, & propterea C A subtendens maiorem angulum rectum, maior erit quàm C E, quæ acutum subtendit: cumque punctum E tangentis cadat extra sectionem, erit C F minor, quàm C E; ideoque C A multo maior est, quàm C F, quapropter C A non erit breuissima, quod est contra hypothesin.*

b Si vero fuerit D A C rectus, &c. *Quia C A supponitur breuissima, & angulus D A C rectus, erit A D tangens; nam si hoc verum non est, ducatur ex puncto A recta linea A G, contingens sectionem in A: secabit utique tangens A G ipsam D A, & erit angulus C A G rectus nimirum contentus à breuissima C A, & tangente A G, ex proxime demonstrata propositione; ergo duo anguli recti C A D, & C A G æquales sunt inter se, pars, & totum, quod est absurdum.* 33. 34. lib. 2.



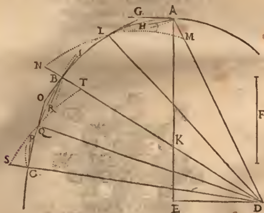
SECTIO DECIMATERTIA

Continens Propof. LXIV. LXV. LXVI. LXVII. & LXXII. Apollonij.

PROPOSITIO LXIV. LXV.

SI ramorum fecantium D C, D B, D A eductorum ex concurfu D ad fectionem C A non fuerint duo breuifecantes, vtique minimus eorum eft, ramus terminatus D A, qui ambit cum axe A E angulum acutum; nempe D A E, & reliquorum propinquior illi minor eft remotiore, fcilicet D B maior, eft quàm D A, & D C quàm D B.

Si vero inter illos fuerint duo breuifecantes tunc vicinior vertici fectionis eft maximus ramorum, & maiori proximior, eft maior, & minori propinquior eft minor.



Producamus perpendicularem D E fuper axim E A, & reperiatur Trutina F. Et primo loco nullus ramus fit breuifecans, iam fi D B, non eft maior, quàm D A, fit æqualis illi, & ducamus duas perpendiculares a

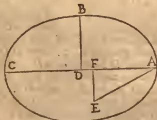
A G,

A G, A H super E A, & D A. Et quia A G tangit sectionem, cadet A H intra sectionem, & ducamus rectam B I tangentem sectionem in
b B. Quoniam ex D non educitur ad sectionem A C vllus breuisecans, 33. 34. lib. 1.
erit E A non maior dimidio erecti (49. 50. ex 5.) aut erit D E maior quàm F (52. ex 5.) Iis positis vtique linea breuissima ex B educta abscindit cum A ex axi lineam maiorem, quàm A K (49. 50. 51. 52. ex 5.) verùm linea breuissima continet cum tangente B I angulum rectum (29.
c 30. ex 5.) igitur D B I est acutus, quare si centro D, interuallo D B circulus describatur, tunc B I cadit intra circulum, & A H cadit extra id
d ipsum, quia est perpendicularis ad D A; igitur circulus secat conisectionem; secet eam in L, & iungamus L D, ducamusque L G sectionem 33. 34.
e tangentem. Patet (vt dictũ est) quod D L G sit acutus; ergo L G cadit lib. 1.
intra circulum B L A, sed cadit extra, quod est absurdum; ergo B D non est æqualis ipsi A D. Neque minor illo esse potest; quia si secetur D M maior, quàm D B, & minor, quàm D A, & centro D, interuallo D M, circulus M L N describatur, tunc D N, nempe D M maior est,
f quàm D B, & propterea circulus N L M secat conisectionem. Subinde patebit (quemadmodũ demonstrauimus) quod D B non sit minor, quàm D A; igitur D B maior est, quàm D A.

g Postea dico, quod D C maior est, quàm D B; quia demonstrauimus, angulũ D B O esse obtusum, & patet, quod D C P est acutus, & procedendo trito iam itinere demonstrabimus, quod Q O necesse est, vt cadat intra circulum C Q B. Et quod si fuerit D C minor, quàm D B, aut æqualis, necesse est, vt Q O cadat intra circulum C Q B; sed cecidit extra, quod est absurdum; igitur D C maior est, quàm D B, & D B maior, quàm D A, quod erat ostendendum.

PROPOSITIO LXVI.

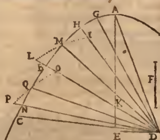
IN sectione elliptica A B C, cuius axis maior A C eius centrum D, & D B dimidium recti, duci nequeat ex E ad quadrantem A B breuisecans, & producatur perpendicularis E F; Dico punctum F cadere inter D A.



a Quia si caderet inter C, D duci posset ex E ad sectionem A B
b aliqua breuisecans (56. ex 5.) quod est contra suppositionem. Deinde patet, quemadmodum demonstrauimus in parabola, & hyperbola, quod pr. 64. 65.
E A minima sit linearum, & ramorum ad sectionem B A cadentium, & huius.
propinquior illi, minor sit remotiore, & hoc erat propositum.

PROPOSITIO LXVII.

POstea repetamus figuras, paraboles, & hyperboles, & quoquot sunt illius signa, & supponamus quod ipsius D B portio B K, sit tantummodo linea breuissima; Dico, quod D A quoque minima est linearum egredientium ex D ad sectionem A C, & illi propinquiores sunt minores remotioribus. a b

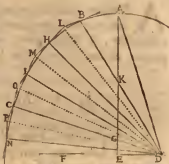


c Quia educitur ex D vnus tantum breuisecans erit mensura E A maior dimidio erecti, & D E æqualis F Trutinæ (51. 52. ex 5.) vnde sequitur, quod lineæ breuissimæ eductæ ab extremitatibus reliquorum ramorum abscindunt cum A ab axi lineas maiores, quàm secant illi rami. Ducamus prius ad sectionem B A ramum D G, inde constat D G maiorem esse, quàm D A (64. 65. ex 5.) Dico iam, quod D B maior est illa, alioquin esset æqualis, vel minor illa, & producamus D H ad sectionem B G; ergo D H maior est, quàm D G, quia remotior est ab D A (64. 65. ex 5.) quare maior est, quàm D B, & ex illo secetur D I maior, quàm D B, & minor, quàm D H, & centro D interuallo D I descriptus circulus secabit sectionem B G, secet eam in M, & iungamus D M; ergo D M, nempe D I, quæ concessa fuit maior, quàm D B est etiam maior, quàm D H, propterea quod est remotior ab D A, quàm D H (64. ex 5.) igitur D I maior est quàm D H, quod est absurdum; quare D B maior est, quàm D H. d e

Patet etiam, quod D B minor sit, quàm D C, alioquin esset vel illi æqualis, aut maior, & ducamus D N ad sectionem C B; ergo D N minor est, quàm D C, eò quod proximior est D A (64. ex 5.) quare minor est, quàm D B, & secetur D O ex D B maior, quàm D N, & minor quàm D B, & centro D, interuallo D O circulus descriptus secabit sectionem exempli gratia, in Q, & iungamus D Q, igitur D Q minor est quàm D N, sed est æqualis D O, quæ supposita fuit maior, quàm D N, ergo D Q maior est, quàm D N; verum est minor illo, quod est absurdum; igitur D C non est minor D B, neque æqualis; quare maior illa est. Atque sic patet, quod D B minor sit omnibus lineis egredientibus ex D ad sectionem B C, & illi proximiores ex illa parte, minores sunt remotioribus. Quapropter manifestum est, quod D A sit minimus omnium ramorum egredientium ex D ad sectionem A B C, & reliqui proximiores illi, minores sunt remotioribus, quod erat ostendendum. f g

PROPOS.

PROPOSITIO LXXII.



SI eductæ fuerint ex D duæ breuiſecantes D C, D B, quorum ſegmenta G C, B K ſint breuiſſima, & D B propinquior ſit vertici ſectionis; Dico, quod D B maximus eſt ra-
a morum egredientium ad ſectionem A B C, & minimus eorũ D C, & ramorum egredientiũ ad ſectionem A C, qui D B propinquiores maiores ſunt remotioribus, & propinquiores D C (ex ramis egredientibus ad ſectionem in ea parte) minores ſunt remotioribus.

Sit F Trutina, & quia iam ducti ſunt ex D duo breuiſecantes, ideo E A excedit dimidium erecti, & D E minor eſt, quàm F (51. 52. ex 5.) his poſitis, vtique lineæ breuiſſimæ egredientes ab extremitatibus ramorum qui ſunt in ſectione B C abſcindunt ab axi E A minores lineas, quàm abſcindunt rami (51. 52. ex 5.) & qui ducuntur ab extremitatibus egredientium ad reliquas ſectiones abſcindunt lineas maiores. Educamus itaque ramos D H, D I ad ſectionem B C, & ducamus B L, L H M, & I M tangentes ſectionem in punctis B, H, I; quia B K eſt breuiſsima erit L B D angulus rectus, & quia breuiſſima egrediens ex H abſcindit cum A ab axi E A lineam minorem, quàm ſecat D H erit L H D obtuſus, & iungamus D L; igitur duo quadrata D H, H L minora ſunt, quàm quadratum D L, quod eſt æquale duobus quadratis L B, D B; verum L B minor eſt, quàm H L (68. ex 5.) ergo D B maior eſt, quàm D H. atq; 29. 30. huius. Ex 29. 30. huius.
b ſic patet, quod D H maior ſit, quàm D I, quia D H M eſt acutus, & D I M obtuſus: & D I maior ſit, quàm D C. Quare B D maximus eſt ra- Ibidem.
c morum egredientium ad B C, & iam demonſtratum eſt, quod ſit maximus ramorum egredientium ad B A (64. 65. ex 5.)

Ponamus poſtea N extra ſectionem B C, & iungamus D N, itaque linea breuiſſima egrediens ex N abſcindit ab axi E A maiorem lineam, 51. 52. huius.
d quàm ſecat D N; ergo tangens in N continet cum D N angulum acutum: poſtea oſtendetur, quemadmodum hic dictum eſt, quod D C minimus ſit reliquorum ramorum egredientium ad reliquas ſectiones, & ſit minimus ramorum egredientium ad A C, quare manifeſtum eſt, quod D B ſit maximus ramorum, & D C minimus, & quod maioribus propinquiores ſunt maiores remotioribus, & minoribus propinquiores, minores ſunt remotioribus, quod erat oſtendendum. Ex 29. 30. huius.

MONITVM.

Antequam huius Decimætertiæ Sectionis explicationes, atque emendationes aggrediamur, vt Notæ breuiores, clarioresque reddentatur, & testus Arabici menda facilius corrigi possent, operæ pretium duximus (amice lector) Lemmata sequentia præmittere.

LEMMA IX.

Si ad comsectionem, atque ad vnum quadrantem ellipsis A B C à concursu D nullus ramus duci possit, qui sit breuisecans; Dico, quod quilibet secans ramus D B cum tangente H B G per eius terminum B ducta efficit angulum D B H ad partes verticis A acutum, & D B G, qui deinceps est, obtusum.

Quoniam nullus ramus ex concursu D ad sectionem A C ductus est breuisecans, erit (ex conuersa propositionis 49. 50. 51. 52. huius) mensura A E aut non maior semisse lateris recti, aut perpendicularis D E maior Trutina, quæ sit F, & ideo quilibet ramus secans D B cadit supra breuissimam ex puncto B ad axim ductam, est verò breuissima ex puncto B ad axim ducta
29. 30. huius *perpendicularis ad G B H tangentem sectionem in B; ergo angulus D B H, verticem A respiciens est acutus, & qui deinceps est D B G erit obtusus.*

LEMMA X.

Iisdem positis, si à concursu D vnicus tantum ramus D B breuisecans ad sectionem A B duci potest; Dico, quod quilibet alius ramus secans D I supra, vel infra breuisecantem D B positus efficit cum recta L I H tangente sectionem in I angulum D I L, verticem respicientem, acutum, & D I H, qui deinceps est, obtusum.

Nam ex conuersa propositione 51. & 52. huius perpendicularis D E æqualis erit Trutina F, & ideo quilibet ramus D I positus supra, vel infra breuisecantē (qui

(qui est D B) cadit supra breuissimam ex puncto I ad axim ductam, quæ perpendicularis est ad tangentem L I H, & propterea angulus D I L, verticem A respiciens erit acutus, & consequens angulus D I H obtusus. 51. 52. huius. 29. 30. huius.

LEMMA XI.

Iisdem positis, si à concursu D duo breuisecantes D C, D B ad sectionem A B duci possunt; Dico, quod quilibet ramus secans D I positus supra breuisecantem D B vertici proximiorem, vel infra infimum breuisecantem D C, efficit cum recta L I H tangente sectionem in I angulum D I L, respicientem verticem A, acutum, & consequentem D I H obtusum, & quilibet ramus D O inter breuisecantes positus efficit cum recta G O N sectionem tangente in O angulum D O G verticem respicientem obtusum, consequentem vero D O N acutum.

Quia (ex conuersa propositione 51. & 52. huius) perpendicularis D E minor esse debet Trutina F, & propterea quilibet ramus D I supra breuisecantem D B, vel infra breuisecātem D C cadit supra breuissimam ex puncto I ad axim ductam, cum qua contingens L I angulum rectum constituit; ergo angulus D I L verticem respiciens, est acutus, & consequens D I H obtusus; Similiter quilibet ramus D O inter breuisecantes positus cadit infra breuissimam ex puncto O ad axim ductam, & cum illa sectionem contingens G O efficit angulos rectos, igitur angulus D O G verticem respiciens, est obtusus, & consequens D O N acutus. 51. 52. huius. 29. 30. huius. Ibidem.

Notæ in Propos. LXIV. & LXV.

Antea Apollonius docuit qui nam rami ab origine ad conisectionem ducti essent minimi, & quo ordine reliqui rami se se excederent, modo agit de ramis axim secantibus à concursu ductis, & quærit qui minimus, & qui maximus sit, & quo ordine disponantur.

a Producamus perpendicularem D E super axim, &c. *Si nullus ramus breuisecans à concursu D ad sectionem A C duci potest; Dico, quod ramus terminatus D A est minimus omnium ramorum secantium D B, D C, & propinquiores verticì A minores sunt remotioribus; ducatur D E perpendicularis ad axim eum secans in E, & reperiatur Trutina F. Et siquidem D A non est minor quolibet alio ramo secante D B infra ipsum posito erit aequalis, aut maior illo; sitque prius D A aequalis D B, si fieri potest, & ex puncto A verticis ducatur A G perpendicularis ad axim A E, quæ continget sectionem in A, pariterque ducatur recta A H perpendicularis ad ramum A D inclinatum ad axim;* 17. lib. 1. 32. pr.

& quia

& quia A H cadit infra A G ad partes axis cum D A ; ad quam illa perpendicularis est, extendatur vltra axim A E, nec possit inter tangentem A G, & sectionem conicam A B, aliqua recta linea intercipi; igitur A H cadit intra conisectionem, & angulus E A H est acutus.

Quoniam ex D non educitur ad sectionem A C vllus breuisecans, &c. b
Sequitur quidem ex hac hypothesi, quod mensura E A non sit maior semierecto
Ex 49. 50. huius. *aut si maior est, sit quoque perpendicularis D E maior Trutina F, ex conuersa propositione 51. 52. huius per deductionem ad inconueniens.*

Quare si centro D interuallo D B, &c. *Circulus enim B I L H A radio D B descriptus transibit per verticem A cum radius D B positus sit æqualis D A, cumque angulus D B I sit acutus, ex Lemmate nono, cadet necessario B I intra circulum B I L.* c

Igitur circulus secat conisectionem, &c. *Quia B I cadit extra conisectionem, quam tangit, & intra circulum B L A, vt dictum est, è contra recta A H cadit intra eandem conisectionem, & extra ipsum circulum, quem tangit, cum H A perpendicularis sit ad circuli radium D A; igitur circulus B I L A fertur extra conisectionem ad partes B I, & intra eandem ad partes A H; quare necessario conisectionem secat.* d

Patet, vt dictum est, quod D L G sit acutus, &c. *Hoc enim sequitur ex nono Lemmate præmisso, respicit enim angulus D L G verticem A; & ideo est acutus, & cadit necessario recta L G intra circulum B L A radio D L descriptum ad partes L A; & portio circuli L H A cadit intra conisectionem L A;* e
35. 36. lib. 1. *igitur recta L G cadit intra conisectionem L A, sed cadit extra eandem sectionem, cum contingat eam in L, quod est absurdum.*

Deinde

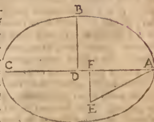
f Deinde patebit, quemadmodum demonstrauimus, &c. *Quia D M facta est maior, quàm D B, & minor quàm D A, estque circuli radius D N aequalis D M; ergo punctum M cadit intra conisectionem, N vero extra ipsam; & propterea circulus M L N sectionem conicam secabit alicubi, vt in L, & portio circuli M L intra conisectionem A L incidet: rursus ducatur radius D L, & L G conisectionem tangens in L erit, vt prius angulus D L G acutus; & ideo L G cadit intra circulum L M, & propterea intra conisectionem A L, sed eadem L G cadit extra ipsam, quia eam contingit in L, quod est absurdum; quare ramus D A non est maior, quàm D B; sed prius neque illi aequalis erat; igitur ramus terminatus D A minor est quolibet ramo secante D B infra ipsum posito, & propterea minimus erit omnium secantium.* 33. 34. lib. 1.

g Postea dico, quod D C maior est, quàm D B, &c. *Demonstratio secundae partis huius propositionis, quàm Apollonius innuit (quia constructione, ac progressu simili superiori perfici potest) hac ratione restituitur. Demonstrandum est quemlibet ramum D B vertici A proximiorem esse minorem quolibet ramo D C remotiore. Ducantur recta C P contingens sectionem in C, & O B tangens sectionem in B, & recta B R perpendicularis ad ramum D B; & si quidem ramus D C non concedatur maior, quàm D B, sit primo ei aequalis, si fieri potest, & centro D interuallo D C describatur circulus C P R, qui transibit per punctum B, ob aequalitatem radiorum D C, D B; & quia (ex Lemmate nono) angulus D C P verticem respiciens, est acutus, recta C P cadet intra circulum C P R; sed cadit extra conisectionem, cum sit contingens; igitur portio circularis peripheriae C P ducitur extra conisectionem C Q B: rursus, quia angulus D B O est obtusus (ex nono Lemmate, cum verticem A non respiciat) ergo R B perpendicularis ad D B cadit intra conisectionē, cum B O posita sit eā contingens: cadit verò eadem B R extra circulum B R Q, cum sit perpendicularis ad circuli radium D B; igitur circuli portio B R intra conisectionem cadet: sed prius eiusdem circuli portio C P extra eandem sectionem ducebatur; igitur idem circulus secat conisectionem alicubi, vt in Q, ducaturque denuo ramus D Q, & Q O contingens sectionem in Q; Vnde (ex nono Lemmate) angulus D Q O erit acutus; & propterea recta Q O intra circuli portionem Q R constituta intra conisectionem cadet, quod est absurdum; recta enim Q O extra conisectionem Q A cadit, quàm contingit in Q; non ergo ramus D C aequalis est ipsi D B. Sit secundò D C minor, quàm D B (si fieri potest) seceturque D T minor quàm D B, sed maior quàm D C; & centro D interuallo D T describatur circulus T Q S; is quidem ad partes B cadet intra, ad partes vero C extra conisectionem; & propterea eam alicubi secabit, vt in Q; & ducto ramo D Q, & Q O contingente sectionem in Q, erit angulus D Q O acutus, & ideo recta Q O cadet intra circulum T Q, & propterea intra conisectionem, quod est absurdum; Q O enim cadit extra sectionem Q A, quàm contingit in Q; non ergo ramus D C minor est, quàm D B, sed neque aequalis prius ostensus fuit; igitur quilibet ramus D B vertici A propinquior minor est quolibet ramo remotiore D C, quod erat ostendendum.*

33. 34. lib. 1.

Lem. 9.

Notæ in Propos. LXVI.



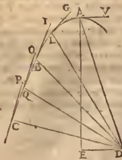
Quia si caderet inter C, D duci posset, &c. *Quotiescumq; enim perpendicularis E F cadit super centrũ D, vel secat semiaxim D C inter D, & C, tũc ex concursu E vnicus ramus breuisecans duci potest ad sectionem B A, qui nimirum cadit inter verticem remotiorem A, & axim minorem D B: sed ex hypothesi nullus ramus ex concursu E ad quadrantem ellipsis A B duci potest, qui sit breuisecans; igitur perpendicularis E F secat semiaxim A D in puncto F posito inter A, & D.*

45. 56. huius.

Deinde patet, quemadmodum demonstrauimus in vtraque hyperbola, &c. *Permuto particulam [vtraque] vt manifestè erroneam, lege enim debet in parabola, & hyperbola. Quod vero ramus terminatus E A minimus sit omnium ramorum secantium manifestum est ex demonstratione propositionis 64. 65., quæ comprahendit etiam ellipsim, quando mensura F A minor est semiaxi A D, vt ex propositione 52. patet. Et similiter ramorũ secantium ex concursu E ad sectionem A B ductorum propinquiores vertici A minores sunt remotioribus ex eadem demonstratione 64. 65. huius.*

Ex demonstratione præmissa propositionum 64. & 65. deduci potest consectarium, à quo notæ subsequentes breuiores reddantur.

COROLLARIVM PROPOSIT. LXIV. & LXV.



Si in aliqua peripheria cuiuslibet conisectionis omnes rami secantes, qui à concursu duci possunt, cum tangentibus ab eorum terminis ductis constituunt angulos, qui verticem respiciunt, acutos; rami proximiores vertici sectionis minores erunt remotioribus.

Ex eo enim, quod in propositionibus 64. & 65., omnes rami D A, D L, D B, D Q, D C, & reliqui omnes, qui duci possunt ex concursu D ad sectionem A B C efficiunt cum tangentibus sectionẽ à terminis A, L, B, Q, C angulos, verticem A respicientes, acutos, vt sunt

sunt D A V, D L G, D B I, D Q O, D C P, ostensus est ramus D A minor quàm D B, & D B propinquior vertici A, minor ramo D C remotiore.

Notæ in Propos. LXVII.

a POstea repetamus figuram vtrãque hyperboles, &c. *Lego; Repetamus figuras paraboles, & hyperboles, & supponantur denuo eadem lineæ adductæ ex concursu D ad sectionem; & perpendicularis D E, atque Trutina F, & omnium ramorum secantium vnicus tantummodo D B sit breuisecans.*

b Et illi propinquiores sint maiores remotioribus, &c. *Sed mendosè; legi debet; Et illi propinquiores sint minores remotioribus.*

c Quia educitur ex D vnus tantum breuisecans, &c. *Legi debet. Quia educitur ex concursu D vnus tantum breuisecans, erit mensura E A maior dimidio erecti, & D E perpendicularis ad axim æqualis erit Trutina F.* Conuers. 51. 52. huius.

d Inde constat D G maiorem esse, quàm D A, &c. *Quia ex concursu D ad sectionem A C vnicus ramus D B breuisecans supponitur igitur omnes rami cadentes inter A, & B præter infimum D B constituunt cum tangentibus sectionem, ab eorum terminis ductis, angulos respicientes verticem A acutos; & propterea ramus terminatus D A minor est quolibet ramo D G infra ipsum, & supra ramum D B posito; atque ramus D G minor est quolibet alio à vertice remotiore ducto ex D ad peripheriam A B. Dico iam, quod ramus D B maior est quolibet ramo D G, posito infra verticem A, & supra breuisecantem D B; Si enim hoc verum non est, erit D B æqualis, aut minor, quàm D G, & tunc ducto quolibet ramo D H ad sectionem G B infra ramum D G, erit D H remotior à vertice A maior propinquiore D G, & propterea ramus D B adhuc minor erit ramo D H.* Lem. 10. Coroll. 64. 65. huius. Ibidem.

e Ergo D M nempe D I, &c. *Quia D M, vt remotior à vertice A, est maior, quàm propinquior D H est vero D L, atque D I æqualis D M cum sint radij eiusdem circuli; ergo D I portio maior est, quàm totum D H, quod est absurdum; quare D B maior est quolibet ramo D G infra verticem A, & supra ramum D B posito; & propterea D B multo maior erit, quàm D A.* Ibidem.

f Ergo D N minor est, quàm D C, &c. *Dubitare quis posset, an ramus D N, quia propinquior est vertici A sit minor remotiore ramo D C, vt in propositione 64. & 65. verificabatur; & ratio est, quia hypotheses sunt diuersa, nam ibi nullus ramus breuisecans à concursu D ad sectionem A C duci posse supponebatur, in hac vero propositione 67. ponitur vnicus breuisecans D B, at scrupulus omnis tolletur, si dicatur, non quidem ex propositionibus 64. & 65. sed ex demonstratione ibi allata, seu ex Corollario in fine notarum apposito,*

 propo-

propositum deduci, nam duo rami D C, & D N positi infra singularem breuisecantem D B efficiunt cum rectis tangentibus sectionẽ angulos verticem respicientes acutos; igitur vt in secunda parte propositionum 64. & 65. demonstratum est, erit ramus D N vertici propinquior minor remotiore ramo D C.

Lem. 10.

Et centro D, interuallo D O circulus descriptus secabit sectionem exempli gratia in Q (56. ex 5.) & iungamus, &c. *Videtur omnino expungenda citatio in textu apposita; (56. ex 5.) nam circulum O Q manifestum est, secare conisectionem alicubi, vt in Q, cum radius D O positus sit minor D B, & maior D N; postea, quia D Q propinquior est vertici A, quàm D N, & omnes rami à D ad peripheriam sectionis N Q ducti, efficiunt cum suis tangentibus angulos, verticem respicientes, acutos; igitur D Q minor est, quàm D N, quod est absurdum; posita enim fuit D O; seu ei aequalis D Q, & D P maior, quàm D N.*

Lem. 10. Coroll. 64. 65. huius.

COROLLARIVM PROPOSIT. LXVII.

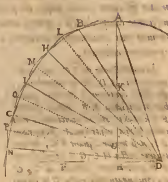
Angulorum à ramis secantibus, qui à cõcursu ad conisectionem duci possunt, cum tangentibus ab eorum terminis ductis cõprahensorum, si vnus tantum rectus fuerit, reliqui omnes verticem respicientes acuti; rami proximiores vertici sectionis, minores erũt remotioribus.

Ex eo enim, quod in propositione 67. omnes rami D A, D L, D C, & reliqui omnes, qui duci possunt ex concursu D ad sectionem A B C, cum tangentibus sectionem à terminis A, L, C comprahenderunt angulos verticem respicientes D A V, D L G, D C P acutos, & tantummodo vnus D B I rectus fuit ostensus est ramus D A minor, quàm D L, & D L vertici A propinquior, minor, quàm D B, atq; D B minor quolibet remotiore D C.

Notæ

Notæ in Proposit. LXXII.

a ET minimus eorum D C, &c. *Textus videtur mendosus; nam vt inferius ostendetur, ramus breuisse-cans D C à vertice remotior, non semper minimus est omnium ramorum cadentium ex concursu D ad sectionem A B C; itaque legendum puto; D C est minimus ramorum cadentium ad peripheriam sectionis B C N; quod manifestè indicatur ex determinatione in fine propositionis apposita; inquit enim: propinquiores D C (ex ramis egredientibus ad sectionem in ea parte) minores sunt remotioribus, vbi conijcitur, Apollonium noluisse pronũciare, ramum D C minimum esse omnium, qui in sectione A C N duci possunt, neque propinquiores D C minores esse quolibet remotiori ad partes verticis A constituto, sed tantummodo eorum, qui in sectione C B, & in inferiori C N ducuntur minimum esse D C, & ei propinquiores minores esse remotioribus.*



b Atque sic patet; quod D H maior sit, quàm D I, &c. *Ex vndecimo enim Lemmate angulus D H M est acutus, & D I M obtusus, & coniuncta D M erunt duo quadrata D H, H M maiora quadrato D M, quæ subtendit angulum acutum; quadratum verò D M maius est duobus quadratis D I, I M, ergo multo magis duo quadrata D H, H M simul sumpta maiora sunt duobus quadratis D I, I M simul sumptis, & auferatur ex aggregato maiori quadratum minus H M, & ex minori tollatur quadratum maius I M (cum contingens H M propinquior vertici A minor sit remotiore M I) remanet quadratũ D H maius quadrato D I, & propterea ramus D H maior erit ramo D I, & simili modo ramus D I maior ostendetur ramo D C.* 68. 69. huius.

c Et iam demonstratũ est, &c. *Scilicet: quia omnes rami ex D ad peripheriã A B ducti efficiunt cum suis tangentibus angulos verticem respicientes acutos; & propterea ramus D B maior erit quolibet alio ramo inter B, & A ducto; ideoque D B erit maximus cadentium in peripheria A B.* Lem. 11. Coroll. 64. 65. huius.

d Postea ostendetur, quemadmodum hic dictum est, &c. *Textus est valde corruptus; sic restituendum puto; ostendetur, quemadmodum supra dictum est, (scilicet in secunda parte propos. 67.) quod D C minimus sit omnium ramorum ad sectionem infimam C N cadentium, & vt hic ostensum est, sit minimus ramorum egredientium ad sectionem B C; quare patet, quod D B sit maximus ramorum cadentium ad sectionem A C, & D C sit minimus cadentium ad sectionem B C N, & quod propinquiores maioribus, sunt maiores remotioribus in peripheria sectionis A C, & propinquiores minoribus, sunt minores remotioribus in peripheria sectionis B C N, & hoc erat ostendendum.*

Quod

Quod autem infimus ramus breuisecans D C non sit necessario minimus omnium ramorum cadentium ad peripheriam sectionis A B, modò ostendetur.

PROB.6. Addit. *In conisectione duos ramos breuisecantes, ducere, quorum infimus maior sit ramo secante posito in peripheria à vertice, & suprema breuisecante comprahensa: oportet autem in ellipsi, vt rami secantes ad vnum eius quadrantem ducantur à concursu, inter axim minorem, & verticem collocato.*

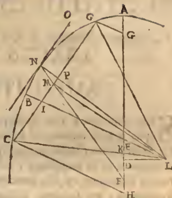
In conisectione A B C, cuius vertex A axis A D, & in hyperbola, & ellipsi centrum E ducatur qualibet breuissima F B: postea secetur F G ex axi, ita vt punctum G non cadat supra verticem A, seceturque F H non maior, quàm F G, ducanturque recta H C, G G parallela ipsi F B occurrentes sectioni in C, & G, coniungaturque recta C G secans F B in I: patet, C I maiorem non esse, quàm I G; propterea quod G C, G H à parallelis secantur proportionaliter; Deinde ex C ducatur alia breuissima C K, occurrens B F vltra axim in L, iungaturque ramus G L: ostendendum est L C maiorem esse, quàm L G. Secetur C G bifariam in M, atque per M ducatur sectionis diameter M N parallela axi in parabola, & per centrum extensa in reliquis sectionibus, occurrens sectioni in N, ducaturque O N sectionem contingens in N, iunganturque L M, & L N, qua secet G C in P. Quoniam G I aqualis, aut maior est, quàm I C, cadet punctum M bipartita diuisionis totius C G, vel in I, vel inter I, G, & in vtroque casu punctum N cadet inter G, & B (eoquod diameter M N parallela axi in parabola, aut ex centro E educta in reliquis sectionibus efficit angulum N M L ad partes verticis A) & ideo ramus L N cadens supra duos breuisecantes L C, L B ad partes verticis efficit cum tangente O N

8. 9. 10. huius. (margin)

8. 9. 10. 26. 27. 28. huius. (margin)

33. 34. lib. 1. (margin)

te O N angulum acutum L N O verticem A respicientem; estque G C ordinatim applicata ad diametrum N M parallela tangenti verticali O N; ergo angulus L P G externus æqualis erit angulo L N O interno, & opposito, & ad easdem partes constituto; & ideo angulus G P L acutus quoque erit, at in triangulo P M L angulus internus L M P, & oppositus minor est externo L P G acuto; igitur angulus L M P acutus pariter erit, & L M C obtusus; suntq; in triangulis L M G, & L M C circa angulos inæquales, latera G M, M C æqualia, & L M commune; ergo L C maior est, quàm L G, quod erat faciendum. Lem. 11. 5. lib. 2.



E contra fieri potest, vt infimus breuisecans ramus L C æqualis, aut minor sit ramo aliquo supra breuisecantem reliquum B L posito. Nam L C minor est, quàm B L, & maior effici potest ramo non vltra sectionis verticem A collocato ex prima parte huius propositionis, sed rami à concursu L educti cadentes inter puncta A, & B successiuè augentur quo magis à vertice A recedunt; Ergo ramus L C æqualis, aut minor erit aliquo ramo ab eodem concursu L educto inter puncta A, & B cadente; igitur manifestum est ramum breuisecantem C L infimum duorum breuisecantium, non esse semper minimum omnium ramorum cadentium ex concursu L ad peripheriam sectionis A B C, sed tantummodo minorem esse eorum, qui inter duo breuisecantes B L, C L cadunt, & reliquorum infra ramum C L cadentium, atque aliquorum in pepheria A N existentium propè maximum L B; quapropter existimandum est, incuria alicuius verba illa non sine Apollonij iniuria textui irrepsisse.



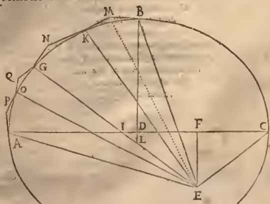
SECTIO

SECTIO DECIMAQVARTA

Continens Propoſ. LXXIII. LXXIV. LXXV. LXXVI. & LXXVII.

PROPOSITIO LXXIII.

SI ex concurſu E non exiſtente ſuper rectum minorem ellipſis A B C ducatur ad ſectionem A B vnicus ramus vtrumque axim ſecans, cuius portio G I inter ſectionem, & axim maiorem A C ſit breuiſſima, vel duo breuiſecantes; vtique ramorum ſecantium ex illo concurſu egredientium maximus erit breuiſecans, qui ſectionis rectum ſecat, nempe E G, & illi proximior maior eſt remotiore; minimus verò eorum eſt, qui terminatur à vertice ſectionis proximiori concurſui, nempe E C, & illi propinquiores minores ſunt remotioribus, nempe inter C G. Si autem egrediantur ex illo tres breuiſecantes, & duo illorum ſecuerint menſuram, & vnus ſecuerit rectum, vtique qui rectum ſecat eſt maximus ramorum ſecantium: & ramorum inter mediam breuiſecantem, & remotiorem verticem ſectionis à concurſu cadentium, proximior illi, eſt maior remotiore, & maximus duorum reliquorum breuiſecantium eſt ille, qui vertici proximus eſt, & ramorum, inter proximiorem verticem ſectionis, & intermedium breuiſecantem cadentium, vicinior illi, maior eſt remotiore. a



Eriga-

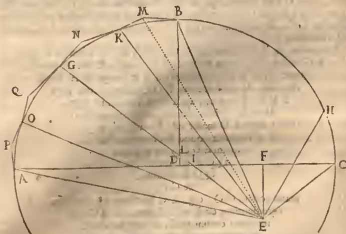
b Erigamus itaque super D perpendicularem D B occurrentem E G in L; ergo est dimidium recti, & E non est indirectum, quia non egreditur ex E, nisi vnicus breuissecans; insuper lineæ breuissimæ egredien-
c tes ab extremitatibus reliquorum ramorum abscindunt ab axi A C cum C, lineam maiorem, quàm secant rami illi. (51. 52. ex 5.) His positis manifestum est, quod E C F est acutus; atque E C minima est linearum egredientium ex E ad quadrantem E B, & illi propinquior, minor
d est remotiore; modo demonstrandum est, quod E K maior quoque est, quàm E B; producamus itaque B M, M K tangentes, ergo M B E est obtusus, & M K E acutus (29. ex 5.) quia breuissima egrediens ex K abscindit cum A minorem lineam, quàm secat K E (57. ex 5.) eo quod K cadit inter duas lineas L B, L G; & iungamus M E; ergo duo quadrata M B, B E minora sunt, quàm quadratum M E, quare minora erunt duobus quadratis M K, K E, & M B maior est, quàm M K, ergo B E minor est, quàm K E; & sic demonstratur, quod G E maior sit, quàm K E; Nam si producamus G N tangentem, tunc N G E est rectus, quia G I est breuissima, & N K E obtusus; ergo G E maior est, quàm E K; itaque G E maximus est ramorum egredientium ex E ad sectionem G C, & minimus eorum E C, atque propinquior E C minor est remotiore. 70. huius. 30. huius.

e Educamus ex E ad sectionem A G, E A, E O, ostendetur quod E G maior sit, quàm E O, & E O, quàm E A. Erigamus itaque ad A C perpendicularem A P; ergo E A P est obtusus, & producamus P O Q tangentem; ergo P O E est acutus, quia linea breuissima egrediens ex O secat cum A lineam maiorem; ergo E O maior est, quàm E A: atq; sic patet, quod E G maior sit, quàm E O (29. ex 5.) quia Q G E est rectus, & Q O E obtusus, & G Q maior, quàm O Q, ergo E G maximus est ramorum egredientium ex E ad sectionem A B C, & minimus eorum E C, & propinquiores minimo, remotioribus minores sunt, & propinquiores maximo, maiores sunt remotioribus; quod erat ostendendum. 57. huius.

PROPOSITO LXXIV.

DEinde sint E H, E G duo breuisecantes, & E G secet rectum B D. Dico, quod E G est maximus ramorum egredientium ex E ad sectionem A B C, & E C est minimus.

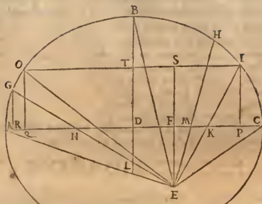
Ex 45. huius. Producatur perpendicularis E F, quæ non cadet super centrum; si enim per centrum duceretur, duci posset ex E, aut vnicus breuisecans tantum (44. ex 5.) aut tres (45. ex 5.) quod est contra hypothesin; ergo E F per centrum non transit, cadat super C D; & quia ducuntur ex E duo breuisecantes, erit C F maior dimidio erecti, & E F æqualis Trutinæ (52. ex 5.) patet itaquè, (vti antea demonstrauimus, quod E G maximus sit ramorũ, & E C minimus; atquè propinquior maximo, maior est, & propinquior minimo, est minor. a



PROPOSITO LXXV.

POstea educamus ex E tres breuisecantes E G, E H, E I, & secent E I, E H mensuram, & E G secet rectum in L. Dico, quod E G est maximus ramorum egredientium ex E ad sectionem A B C, & ramorum inter A H cadentium propinquiores illi, maiores sunt remotioribus, & E I est maximus ramorum egredientium ad sectionem H C, & illi propinquiores maiores sunt remotioribus. a

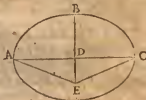
Quo-



b Quoniam I K, H M sunt duæ breuissimæ constat, quod E I maximus sit ramorum cadentium ad illam sectionem (72. ex 5.) & propinquior c illi maior est remotiore : nec non; quia H M, G N sunt duæ breuissimæ constat, vt dictum est, quod G E sit maximus ramorum cadentium vtrin- 74. huius. d que ad sectioné A H. Dico etiam, E G maiorem esse, quàm E I; nam si producatur I O parallela ipsi A C, & iungatur E O, ducanturque perpendiculares I P, O Q, G R, E F S, quia G N, I K sunt breuissimæ erit 15. huius. D P ad P K, quæ est, vt proportio figuræ, vt D R ad R N; ergo F P ad P K minorem proportionem habet, quàm F R ad R N, & diuidendo F K ad K P, nempe F E ad I P, minorem proportionem habet, quàm F N ad N R, nempe F E ad G R: ergo F E ad I P minorem proportionem habet, quàm ad G R, & propterea G R minor est, quàm I P, quæ est æqualis O Q, cuius punctum O remotior est à vertice, quàm G, & ideo E G maior est , quàm E O. (74. ex 5.) Et quia O T æqualis est T I erit O S maior quàm S I, & S E perpendicularis ad O I est communis; igitur O E maior est, quàm E I; & ostensa est E G maior, quàm O E; Ergo E G maior est, quàm E I, quod erat ostendendum.

PROPOSITIO LXXVI.

a SI ex concursu E in recto E B posito ellipsis A B C nõ educatur breuisecans præter E B, qui transeat per centrum; erit E B maximus ramorum secantium ex concursu ad sectionem egredientium.



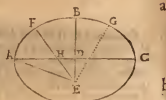
Si vero ex illo educatur alius breuiſecans erit æqualis vni breuiſecanti ex altera parte recti poſito, & omnium reliquorum erit maximus. b



Quia breuiſſimæ egredientes ab extremitatibus reliquorum ramorum abſcindunt cum C, vel A lineas maiores, quàm ſecent rami (illi 44. ex 5.) demonſtrabitur ductis tangentibus, per extremitates illorum (quemadmodum antea oſtenſum eſt) quod E B ſit maximus ramorum egredientium ad duos quadrantes C B, B A, & hoc erat oſtendendum.

PROPOSITIO LXXVII.

Poſtea educatur alius breuiſecans E F; Dico, quod eſt æqualis vni breuiſecanti E G æque remoto à recto D B, & eſt maximus reliquorum omnium. a



Quia B D, F H ſunt duæ breuiſſimæ, ergo rami egredientes ad ſectionem B F abſcindunt cum A maiores lineas, quàm ſecent breuiſſimæ, egredientes ab eorum extremitatibus: idem dicendum eſt de ramis educti ad ſectionis peripheriam B G, & rami educti ad peripherias C G, A F abſcindunt cum C, vel A lineas minores (45. ex 5.) conſtat itaque adhibitis lineis tangentibus, vt dictum eſt, quod E F ſit maximus ramorum ſecantium ex E ad C B A egredientium, excepto vno E G, cui eſt æqualis, quod erat oſtendendum. b c

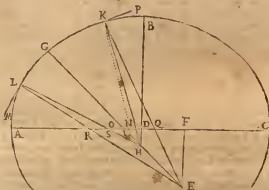
Notæ in Propoſit. LXXIII.

PRO *clariori intelligentia propoſitionum huius ſectionis hæc præmitto.*

L E M M A XII.

Si in ellipſi A B C à concurſu E ductus fuerit ramus E G ſecans vtrumque axim in H, & I, cuius portio G I, inter axim maiorem A C, & ſectionem intercepta, ſit linea breuiſsima; dico, quod quilibet alius ramus E K inter breuiſecantem G E, & axim minorem interceptus, efficit cum ſectionem tangente K P angulum E K P acutum, reſpi-

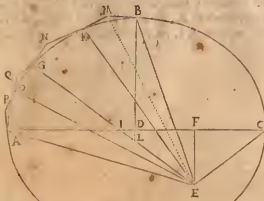
respicientem verticem C concursui propinquiorem: & quilibet ramus E L inter breuisecantem G E, & axim maiorem positus efficit cum tangente L M angulum E L M respicientem eundem verticem A acutum.



Ducatur E F perpendicularis ad axim maiorem, eum secans inter verticem C, & centrum D in F, & ex concursu axis minoris B H, & breuissima G E, scilicet ex H ducantur rectæ H K, & H L; pariterque ex punctis, K, & L ducantur ad axim maiorem A C lineæ breuissimæ K N, L O, ei occurrentes in N, & O. Quoniam (ex præmisso Lemmate 8.) à concursu H ducitur ramus H K inter breuisecantes H B, H G interceptus; ergo H K cadit infra breuissimam K N ad partes verticis C; est vero angulus N K P rectus à tangente, & breuissima contentus; ergo angulus H K P erit acutus, cum H K cadat inter N K, & tangentem K P; cadit vero E K infra ramum H K versus C; igitur angulus E K P respiciens verticem C proximiorem concursui E erit acutus. 29. 30. huius.

Similiter (ex eodem Lemmate 8.) quia ramus H L ducitur inter breuisecantem H G, & verticem A à concursu E remotiorem, cadet ipse supra breuissimã L O, estque angulus O L M ad partes verticis A rectus; ergo H L M acutus erit, cumque E L cadat supra H L versus A; igitur angulus E L M, verticem A remotiorem respiciens, erit acutus, quod erat ostendendum. Ibidem.

a Si à concursu E non existente super recto ellipsis A C, producatur vnicus ramus secans ipsam A C, vt E G, cuius segmentum G I, & A C sit breuissimum, vel duo breuisecantes; vtique maximus secantium ramorum egredientium ex illo concursu, est breuisecans, qui rectum sectionis abscindit, nempe E G, &c. *Textum mendosum sic restituendum censeo. Si ex concursu*



concursu E non existente super axim rectum minorem ellipsis A B C ducatur ad sectionem A B vnicus ramus vtrumque axim secans, cuius portio G I inter sectionem, & axim maiorem A C intercepta sit linea breuissima; vel ducatur præter E G alius ramus breuisecans, mensuram tantummodo abscindens; vtique ramorum secantium, ex illo concursu egredientium, maximus erit ille, qui axim rectum sectionis diuidit, &c.

Erigamus itaque super D perpendicularem, &c. *Scilicet ex centro sectionis D eleuetur D B perpendicularis ad axim maiorem A C, occurrens sectioni in B, & ipsi E G in L, & propterea D B erit semissis recti axis, & punctum E in axi B D non existit ex hypothesi, &c.* b

Quoniam non egreditur ex E nisi vnus breuisecans, ergo lineæ breuissimæ egredientes ab extremitatibus reliquorum ramorum, abscindunt ab axi cum A C, L A lineam maiorem, quàm secent illorum rami (51. 52. ex 5.) & iam patet, quod si ita se res habet L E C est acutus; quia E C breuissima est linearum egredientium ex E ad quadrantem A B, & propinquior illi, minor est remotiore, &c. *Sic legendum puto: Quia præter E G, vtrumque axim secantem nullus alius breuisecans duci posse à concursu E ad sectionem supponitur, ergo lineæ breuissimæ egredientes ab extremitatibus reliquorum ramorum in quadrante C B abscindunt ab axi A C cum vertice C lineas maiores, quàm secent rami (51. 52. ex 5.) pariterque constat, quod angulus E C F sit acutus, atque ramus E C est minimus egredientium ex E ad quadrantem C B, & propinquior minimæ, minor est remotiore.* 64. 65. huius. *Demonstrandum modo est, quod K E maior quoque est, quàm E B, &c.* c

Producamus itaque M B, M K tangentes; ergo M B E est obtusus, & M K E est acutus (29. ex 5.) quia breuissima egrediens ex K abscindit A lineam minorem, quàm A E (57. ex 5.) eo quod K est inter duo segmenta L B, L G: & iungamus M E; ergo duo quadrata M B, B E minora sunt, quàm quadratum M E, quæ minora sunt duobus quadratis M K, K E, &c. *Idest: ex punctis B, K ducantur duæ tangentes sectionem M B, K M* d

occur-

occurrentes in M, & quia angulus D B M rectus est contentus ab axe, & tangen- Conuc f. 32. lib. 1.
te, & cadit B E inter C, & D ergo angulus E B M est obtusus; postea, quia E
K cadit infra breuissimam E G, & supra minorem axim B D, ergo angulus Lem. 12.
E K M respiciens verticem C propinquiorem concursui, erit acutus, & iuncta
M E erunt duo quadrata E B, B M minora quadrato E M, estque quadratum
E M minus duobus quadratis E K, K M circa acutum angulum (cum priora
angulum obtusum comprahendant,) Igitur duo quadrata E B, B M simul sum-
pta minora sunt duobus quadratis E K, K M: estque quadratum M B maius
quadrato M K, cum contingens M K, proximior vertici A axis maioris minor 70. huius.
sit remotiore B M; igitur quadratum E B, scilicet residuum minoris summæ mi-
nus erit quadrato E K, & propterea ramus E B minor erit, quàm E K.

e Et educamus ex E ad sectionem A G, E A, E O, & patebit, quod E
G maior sit, quàm E O, & E O, quàm E A: erigamus itaque ad A C
perpendicularem A P; ergo E A P est obtusus: & ducamus P O Q tan-
gentem; ergo P O E est acutus, quia linea breuissima egrediens ex O ab-
scindit cum A lineam maiorem, & P O est maior, quàm P A; ergo E O
maior est quàm E A, atque sic patet, quod E G maior sit, quàm E O, &c.
Demonstratio postremæ partis huius propositionis neglecta ab Apollonio ob sui fa-
cilitatem occasionem errandi alicui præbere posset, propter verba illa postrema
textui superaddita; non enim ex maiori summa duorum laterum P O, O E si au-
feratur maior O P, & ex minori summa P A, A E auferatur minor P A, necessa-
rio residuum maioris, idest E O maior erit quam E A residuum minoris; itaque
sensus huius contextus talis erit,

Ex concursu E ad sectionem A G ducantur rami E A, & quilibet alius E O;
ostendendum est, E G maiorem esse, quàm E O, & E O maiorem, quàm E A: du-
cantur A P, Q O tangentes sectionem in A, & O conuenientes in P, & tangenti Conuerf.
G Q in Q, manifestum est angulum E A P obtusum esse, cum angulus C A P sit 32. lib. 1.
rectus pariterque quilibet ramus E O inter breuisecantem E G, & verticem A
remotiorem interceptus efficit angulum E O P, verticem A respicientem acutum, Lem. 12.
& sic reliqui omnes rami inter puncta G, & A cadentes; quare (ex Corollario
propositionum 64. & 65.) ramus E A minor erit quolibet ramo E O inter verti-
cem A, & G cadente: rursus, quoniam breuisecans E G constituit cum tangente 29. 30. huius.
angulũ E G Q rectum; quare ex concursu E ad sectionis peripheriam G A omnes Lem. 12.
rami cadentes efficiunt cum tangentibus angulos, verticem A respicientes, acutos,
& vnus tantummodo E G Q est rectus; igitur (ex Coroll. propos. 67 huius) ramus
E O vertici A propinquior minor est remotiore E G; Quapropter ramus breuisecãs
E G maximus est omnium ramorum secantium ad peripheriam A B C cadentium.

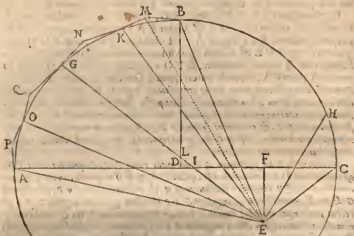
At adhuc non constat, ramum E C minimum esse prædictorum ramorum om-
ni m.   ius ostendatur, E C minorem esse quolibet ramo ad peripheriam
A G cadente: & hoc etiam ob sui facilitatem neglectum fuit ab Apollonio. Absol-
uetur tamen hac ratione.

Quoniam perpendicularis E F cadit inter C, & D, igitur A F maior est, quàm
C F, & F E est communis circa angulos rectos in triangulis C F E, A F E, igi-
tur C E minor est, quàm E A: estque E A minor quolibet alio E O inter A, & G
cadente, igitur E C minor est omnium ramorum cadentium ad peripheriam A G,
sed priùs minor ostensus fuit reliquis omnibus cadentibus ad peripheriam C B G;
igitur ramus E C minimus est omnium secantium, quod erat ostendendum.

Notæ

Notæ in Propoſ. LXXIV.

ERgo E F per centrum non tranſit, cadat ſuper C D, & quia produ- a ćti ſunt ex E duo breuiſecantes; ergo C F excedit dimidium erećti, & E F æqualis eſt Trutinæ (52. ex 5.) patet itaque, vt antea demonſtrauimus, quod E G ſit maximus ramorum, & E C minimus, &c.



Quoniam in 11. huius oſtenſum eſt, quod ſemiaxis minor ellipſis eſt ramus breuiſſimus, ergo ſi incidentia perpendicularis E F ſuper axim A C, ideſt punctum F eſt centrum ellipſis educerentur ex concurſu E tres breuiſecantes, nimirum E H, E G, & E F producta, quæ eſſet axis minor ellipſis: hoc autem eſt contra hypotheſim, cum ducti ſint ex E duo breuiſecantes: ergo eorum vnus E H menſuram C F ſecat, quæ minor eſſe debet ſemiſſe axis maioris C D; igitur ex conuerſa propoſitione 50. huius, menſura C F maior erit ſemiſſe lateris recti, & (ex conuerſa propoſ. 52. huius) erit perpendicularis E F æqualis Trutinæ. Demonſtratio huius propoſitionis neglecta ab Apollonio, propterea quod eodem ferè modo, ac præcedens oſtendi poteſt, breuiſſimè perficietur in hunc modum.

Propoſ. 67. huius. *Quoniam à concurſu E vnicus tantum breuiſecans E H ad quadrantem C B ducitur; igitur C E minimus eſt omnium ramorum cadentium ad ſectionis peripheriam C B, & E C vertici B propinquior minor eſt remotiore E H; & E H minor, quàm E B: rurſus, quia ramorum cadentium ex E ad peripheriam*

Ex 29. 30. huius. *B G vnus tantummodo breuiſecans E G conſtituit cum tangente N G angulum rectum,*

rectum, & reliqui omnes rami cadentes super totum arcũ G B, constituunt cum suis tangentibus angulos acutos, respicientes verticem C; igitur quilibet ramus E B propinquior vertici C minor est quolibet remotiore ramo E K, & E K minor est remotiore E G: & propterea ramus E G maximus est omnium cadentium ad peripheriam C B G. Postremò, quia ramorum cadentium inter breuisecantem E G, & remotiorem verticem A axis maioris, vnicus tantũ E G efficit cum sua tangente angulum E G N rectum; reliqui vero omnes cadentes inter G, & A efficiunt cum suis tangentibus angulos, respicientes verticem A remotiorem, acutos; igitur (ex Corollario propos. 67. huius) ramus E G maior est quolibet ramo E O vertici A propinquiore, & E O maior est, quàm E A: quapropter breuisecans E G vtrumque axim abscindens maximus est omnium ex E cadentium ad semiperipheriam ellipsis C B A, & ramus E C, vt in praecedenti dictũ est, minimus erit omnium, atque propinquiores maximo ex eadem parte maiores erunt remotioribus, & cadentium ad peripheriam C B G minimo C E propinquiores, minores erunt remotioribus, quod erat ostendendum.

Lem. 12. Coroll. prop. 67. huius. 29. 30. huius. Lem. 12. huius.

Notæ in Proposit. LXXV.

a Postea ducamus ex E tres breuisecantes E G, E I, E H, & secent E I mensuram, & E G secet rectum in L, &c. *Idest: Postea si ex concursu E ducti fuerint tres breuisecantes E G, E I, E H; quorum duo E I, E H secent mensuram in K, & M: E G vero secet axim rectum in L, & axim maiorem A C in N. Dico, &c.*

b Quoniam I K, N M sunt duæ breuissimæ constat, quod E I maximus sit ramorum egredientium ad illius sectionem (52. ex 5.) & reliquorum ramorum propinquior illi, maior est remotiore, &c. *Idest: Quia in quadrante elli-*

te ellipsis C B ducuntur à concursu E duo breuisecantes E I, E H; igitur (ex propositione 72. huius) erit breuisecans E I vertici A propinquior maximus omnium ramorum cadentium èx concursu E ad ellipsis peripheriam C H; & propinquior maximo E I maior erit remotiore, sed non omnium ramorũ cadentium ad quadrantem C B, sed eorum solummodo, qui inter verticem C, & infimum breuisecantem E H, & aliquorum propè ipsum; nam rami secantes cadentes propè punctum H hinc inde successiuè augentur, vt dictum est in notis propos. 67. in eiusque Corollario.

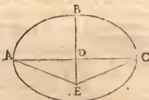
Nec non, quia H M, G N sunt duæ breuissimæ, constat, vt dictũ est, quod G E sit maximus ramorũ egredientiũ ex vtroque latere eius ad A H, &c. C
Quorũ verborũ sensus hic est. Quia ex concursu E ducuntur duæ breuisecantes E G & E H ad semiellipsim A B C, quarum E G secat vtrumq; axim, at E H secat tantummodo mensuram; ergo, sicuti in præcedenti propos. 74. ostensum est, erit ramus E G maximus omniũ cadentiũ ad peripheriam H A, &c. At quia dubitari posset de certitudine huius consequentiæ, quandoquidem hypotheses non sunt omnino eædem; in propositione enim 74. non tres, sed duo tantummodo breuisecantes ex concursu E ad sectionem C B A ducebãtur, hic vero etiam tertia breuisecans ducitur: sed si consideretur progressus Apollonij, eandem conclusionem ex vtraque hypothesi deduci posse percipitur; nam (ex propositione 72. huius) breuisecans E H, infra breuisecantem E I positus, minimus est omnium ramorum cadentium ex E ad peripheriam H B ellipsis, & propinquior minimo E H minor est remotiore, reliquorum vero ramorum cadentium ad quadrantem B A maximus est breuisecans E G, vt ostensum est in præcedenti proposit. 74. ex Lemmate 12. huius, & ex Corollario proposit. 67, atque propinquior ramus maximo E G eorum, qui ad quadrantem B A cadunt maior est remotiore; quapropter ramus E G maximus est omnium ramorum ex E ad ellipsis peripheriam H A cadentium.

Dico

d Dico etiam, quod E G maior ſit, quàm E I, &c. *Ideſt: Oſtendetur etiam, quod ramus E G maximus etiam ſit omnium ramorũ cadentium ad perspheriam C H, propterea quod E G oſtendetur maior E I maximo eorum, qui ad peripheriam C H duci poſſunt. Ducatur ex puncto I recta I O parallela axi maiori A C, quæ ſecabit axim minorem, & ſectionem, cum punctum I cadat inter vertices C, & B duorum axium; ſecet igitur ſectionem in O, coniungaturque E O, atque ex punctis I, O, G, E ducantur perpendiculares ad axim I P, O Q, G R, E F S, quæ ſecent axim in P, Q, R, F, & I O in S, & quia G N, & I K ſunt breuiſſimæ; ergo D R ad R N, atque D P ad P K eandem proportionem habent, nimirum eam, quàm habet latus tranſuerſum ad rectum;* 15. huius. *eſt verò K F minor, quàm D K, atque R F maior, quàm D R; igitur F P ad P K minorem proportionem habet, quàm D P ad P K, ſeu quàm D R ad R N, & multo minorem, quàm F R ad R N; quare diuidendo F K ad K P minorem proportionem habebit, quàm F N ad N R, & propter parallelas F E, I P, & ſimilitudinem triangulorum E K F, I K P eſt E F ad I P, vt F K ad K P; igitur E F ad I P minorem proportionem habet, quàm F N ad N R; ſed propter ſimilitudinem triangulorum E F N, G R N eſt E F ad G R, vt F N ad R N; igitur eadem E F ad I P minorem proportionem habet, quàm ad G R; & propterea I P, ſeu ei æqualis O Q (in parallelogrammo rectangulo P O) maior erit, quàm G R, & propterea punctum O recedit à puncto G verſus B, ideoq; ramus* 74. huius. *E G maximus, maior erit ramo E O, &c.*

Notæ in Propoſ. LXXVI.

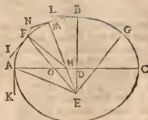
a SI autem non educatur ex concurſu E ad rectum E B ellipſis A B C breuiſecans præter tranſeuntem per centrum, vt E B, vtique erit maximus ramorum ſecantium egredientium ex concurſu ad ſectionem.



Si vero eductus fuerit ex illo alius breuiſecans, ipſe erit ramus maximus, &c. *Imperceptibilis eſt ſenſus huius textus, quia, præter phraſis Arabicæ difficultatem, nonnulla verba in textu deſiderantur; itaq; ſic legendum puto. Si ex concurſu E in recto E B poſito ellipſis A B C non educatur breuiſecans præter E B tranſeuntem per centrum, erit E B maximus ramorum ſecantium ex concurſu ad ſectionem egredientiũ.*

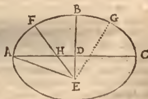
Si vero ex illo educatur alius breuiſecans, erit æqualis vni breuiſecanti ex altera parte recti poſito, & omnium reliquorum erit maximus: Si enim hæc extrema verba non opponerentur, propoſitio non eſſet vera, vt oſtendetur.

b Quia breuiſſimæ egredientes ab extremitatibus reliquorum ramorum abſcindunt cum A, vel B lineam maiorem, quàm ſecet ramus illius (49. ex 5.) demonſtratum ergo eſt in lineis tangentibus ad extremitatem illius, quemadmodum antea, &c. *Mendoſe citatur quadrageſima nona huius, debet potius legi 43. in qua oſtenſum eſt, quod quotieſcunque ramus E B ad ſe-*



minorem B D habet eandem, aut maiorem proportionem, quàm latus transuersum A C ad eius latus rectum; tunc nullus alius ramus ad sectionem A B C breuisecans duci potest, & qualibet linea breuissima vt F H ducta ex puncto F ad axim A C cadit infra ramum E F ad partes centri, & propterea si per F ducatur ex 29. 30. huius. *F I contingens ellipsim qualibet ramus E F efficiet cum tangente angulum E F I respicientem verticem A acutum; Similiter si ducatur A K contingens sectionem in A coniungaturque E A, erit quoque angulus E A K acutus, & ducta B L contingente* ex 32. lib. 1. *sectionem in B erit angulus E B L rectus; quapropter omnes rami ex concursu E ad quadrantem A B ducti efficiunt cum suis tangentibus angulos respicientes verticem A acutos, & vnus tantummodo E B L est rectus; igitur ramorum cadentium ex E ad quadrantem B A minimus est E A, & qualibet ramus E F propinquior vertici A minor est quolibet remotiore; & propterea E B erit maximus: simili modo E B maior erit quolibet ramo E G in quadrante B C existente; Et hic est sensus, ni fallor illorum verborum;* Coroll. 67. huius. demonstrabitur in lineis tangentibus, quemadmodum antea ostensum est, &c.

Notæ in Proposit. LXXVII.



Postea educatur E F, qui est maximus ramorum, &c. *Repono hic similiter verba, quæ in textu desiderantur; Postea educatur alius breuisecans E F; Dico, quod est æqualis vni breuisecanti E G æquè remoto à recto D B, & est maximus reliquorum omnium.* a

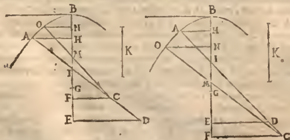
Quia B D, F H sunt duæ breuissimæ; ergo rami egredientes ad sectionem B F abscindunt cum A lineas maiores, quàm secent breuissimæ egredientes ab eorum extremitatibus, & rami egredientes ad duas peripherias C B, F A abscindunt cum A, vel C lineas minores (52. ex 5.) &c. *Quia in ellipsi semiaxis minor B D, & breuissima F H* Lem. 8. huius. *concurrunt in E; ergo qualibet ramus ex E ad peripheriam F B ductus cadit infra breuissimam ab eius termino ad axim A C ductam: similiter, quia ramus E G æquè recedit ab axi D B, ac ramus E F; propterea, ne dum ramus F E æqualis erit ramo E G, sed similiter quilibet alius ramus incidens inter E B,* Ibidem. *& E G cadet infra breuissimam ab eius termino ad axim A C ductam versus* Ibidem. *D, & rami cadentes ad peripherias A F, & C G cadunt supra breuissimas ab eorum terminis ad axim C A ductas ad partes A, & C.*

Constat itaque, vt dictum est de lineis tangentibus, quod E F sit maximus ramorum secantium egredientium ex E ad A B C, quod erat ostenden-

dendum, &c. *Quæ postrema verba sic intelligi, ac corrigi debent. Quia quilibet ramus ex E ad A F ductus cadit supra breuissimam ad partes A ab eius termino ad axim C A ductam; igitur, vt multoties dictum est, constituit cum sua tangente angulum respicientem verticem A acutum, sicuti angulus E A K acutus quoque est, & omnium ramorum ad peripheriam A F cadentiũ tantummodo angulus E F I est rectus; igitur omnium ramorum ex E ad peripheriam A E cadentium maximus est F E remotissimus à vertice A, estque ramus E G æqualis E F, & E G maximus est ramorum cadentium ex E ad peripheriam G C; igitur ramus E F maximus etiam est ramorum cadentium ad peripheriam G C: postea ducto quolibet ramo E M inter F, B, & M N tangente sectionem in M, quæ conueniat cum tangente I F in N, quia E M, vt dictum est, cadit infra breuissimam ex M ad axim B A ductam, cum qua contingens N M angulum rectũ constituit, (ex 30. huius) ergo angulus E M N respiciens verticem A est obtusus, & angulus E F N est rectus, cum F O sit breuissima, igitur duo quadrata E F, F N maiora sunt duobus quadratis E M, M N simul sumptis, & ablatum quadratum M N ex minori summa maius est ablato quadrato N F, cum contingens N F vertici A maioris axis propinquior sit; ergo quadratum E F maius ex quadrato E M, ideoque ramus E F maior erit quolibet ramo E M inter F, & B posito. Non secus ostendetur E M maior quàm E B; quare ramus E F maximus erit omnium cadentium ad peripheriam F B. Eodem modo ramus breuisecans E G maximus erit omnium cadentium ad peripheriam G B; & propterea ramus E F maximus erit omnium ad peripheriam F B G cadentium; Quapropter ramus breuisecans E F æqualis erit vni tantummodo E G æquè ab axi remoto, & maximus omnium ramorum ex concursu E ad semiellipsim A B C cadentium, quod erat ostendendum.* Lem. 8. huius. Coroll. Prop. 67. huius. 70. huius.

Sicuti in prioribus propositionibus factum est, reperientur, quotnam rami inter se æquales à puncto concursus ad conisectionem duci possunt, qua occasione afferam propositiones aliquas non inuenendas, quarum prima erit.

Si ad conisectionem B A à concursu D vnicus tantum breuisecans D A duci possit, & ducatur quælibet F C parallela perpendiculari D E PROP. 7. Addit.

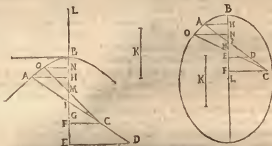


inter productionem breuissimæ, & axim intercepta quem secet in F, reperia-

periaturque Trutina K minoris, vel maioris mensuræ F B: dico perpendicularem C F minorem esse Trutina K.

Secentur primo in parabola abcissa B H, & B N æquales trienti excessus inæqualium mensurarum supra semierectum (vt præcipitur in propositione 51. huius) manifestum est, abscissam B N minorem esse ipsa B H, quando B F minor est, quàm B E, & maior, quando B F superat ipsam B E; eo quod eorum tripla, vna cum semierecto, idest mensura B F minor fuerat in primo casu, & maior in secundo, quàm mensura B E.

Lem. 7. huius. *In hyperbola vero, & ellipsi fiat proportio rectæ H L ad semiaxim transuersum L B subtriplicata eius, quàm inuersa L E segmentum L G homologum lateri transuerso habet ad semiaxim transuersum (ex præscripto proposit. 52. & 53. huius) pariterque fiat proportio N L ad L B subtriplicata eius quàm inuersæ minoris L F in primo casu, & maioris in secundo, segmentum homologum lateri transuerso habet ad L B.*

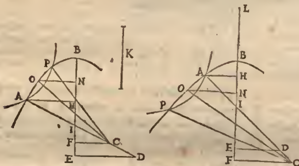


Quoniam in primo casu maius segmentum G L ad eandem L B habet maiorem proportionem, quàm minus segmentum ex L F dissectum; igitur earum subtriplicatæ proportiones inæquales erunt, videlicet H L ad L B maiorem proportionem habebit, quàm N L ad ipsam L B, & propterea H L maior erit, quàm N L, & ablata communi L B, erit H B abscissa maioris mensuræ maior, quàm N B abscissa mensuræ minoris. Similiter ostendetur in secundo casu, quod abscissa N B maioris mensuræ maior est, quàm B H. Ostendendum modo est, perpendicularem C F in vtroque casu minorem esse trutina K; Si
51. 52. huius. *enim hoc verum non est, si fieri potest, sit C F maior trutina K; igitur ex concursu C ad sectionem B A nullus ramus breuiscans duci potest, quod est contra hypothesim; erat enim A I breuissima; quare C F non erit maior trutina K. Sit secundo C F æqualis K, si fieri potest, ergo ramus principalis C O ductus legibus proposit. 51. 52. huius cui competit trutina K erit breuiscans singularis eorum, qui ad sectionem duci possunt, nec vllus alius, præter C O, breuiscans erit: cadit vero ramus C A infra, vel supra ramum C O, propterea quod abscissa B H, & B N inæquales ostensæ sunt; igitur ramus C A diuersus à breuiscante singulari C O non erit breuiscans, quod est contra hypothesim;*

non-

non ergo perpendicularis C F aequalis erit Trutinae K, sed prius, neque maior illa erat; igitur perpendicularis C F necessario minor erit Trutina K; quod erat ostendendum.

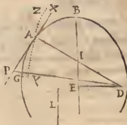
Iisdem positis, si in productione breuissimae A I sumatur quodlibet punctum C citra terminum D perpendicularis D E, à puncto C duci poterit alter ramus breuisecans supra C A incedens; & si punctum C sumatur vltra punctum D poterit ex C duci alter ramus breuisecans infra ipsum C A. PROP.8. Addit.



Quoniam qualibet recta C F parallela perpendiculari D E interposita inter productionem breuissimae A I, & axim minor est Trutina K noua mensura B F (ex praecedenti propos.) propterea ramus principalis C O cadit supra ipsum C A, quando B F minor est, quàm B E, & tunc quidem duci potest hyperbola ex puncto A circa asymptotos (vt in propositione 51. & 52. factum est) quae producta occurret sectioni B A inter B, & O, vt in P, & coniuncto radio C P, erunt duo rami C A, & C P breuisecantes, quorum infimus est C A. Si vero punctum C sumatur vltra punctum D, tunc quidem mensura B F maior erit, quàm B E, & propterea abscissa N B maior, quàm H B, & ideo principalis ramus C O cadet infra ramum C A; & denuo facta eadem constructione propofit. 51, & 52. huius, erunt duo rami C P, & C A breuisecantes, quorũ supremus versus B erit C A, quod erat probandum. 51.52.53. huius.

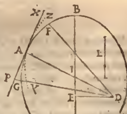
Sit consectio, vel ellipsis portio quadrantis B A G, cuius axis B E, perpendicularis E D, cuiusque Trutina L sit minor perpendiculari D E, & centro D, interuallo cuiuslibet rami secantis D A circulus Z A Y describatur, & ex puncto A ducatur recta A x contingens sectionem: PROP.9. Addit.

nem: Dico, quod circumpherentia Z Y secat tangentem rectam lineam x A, & coniſectionem B G in puncto A.



Quoniam perpendicularis D E ponitur maior trutina L; ergo quilibet ramus D A cadit
51. 52. huius. supra breuiſsimam ex puncto A ad axim B E ductam: efficit vero breuiſsima cum tangente
29. 30. huius. A x angulum rectum; ergo angulus D A x eſt acutus; & propterea recta A x cadit intra circulum A Z; ſed A x cadit extra coniſectio-
35. 36. lib. 1. nem B A, quàm contingit; ergo circumferentia Z A cadit extra ſectionem B A, & extra tangentem A x: poſtea ducatur quilibet ramus D G infra ramum D A ſecans circumferentiã circuli in Y: & quia ramus D A propinquior eſt vertici B, quàm D G, erit D A minor,
64. 65. huius. quàm D G; eſtque D Y æqualis D A (cum ſint ambo radij eiuſdem circuli) ergo D Y minor erit, quàm D G: & propterea quodlibet punctum Y peripheria circularis infra punctum A poſitum cadet intra coniſectionem B G; & ideo circumferentia Z A Y ſecat tangentẽ, & coniſectionẽ in A, quod erat propoſitum.

PR. 10. Addit. Iſdem poſitis, ſit perpendicularis D E æqualis Trutinæ L, & ſit D A ſingularis ille ramus breuiſecans, qui ex concurſu D ad ſectionem
51. 52. huius. B G duci poteſt; perficiaturque conſtructio, vt antea factum eſt; Dico, circulum Z A Y ſecare coniſectionem in A, & contingere rectam A x.



Ducatur quilibet ramus D F ſupra breuiſecantem D A, ſecans circuli peripheriam in Z, & quilibet alius ramus D G infra D A ſecans eandem peripheriam in Y. Et quia ex concurſu D ad ſectionem B G vnicus tantum bre-
Ibidem. uiſecans D A duci poteſt; igitur ramus D F
67. huius. propinquior vertici B minor eſt remotiore D A, & D A propinquior vertici B minor eſt remotiore D G: ſuntque rectæ D Z, D Y æquales eidem D A (cum ſint radij eiuſdem circuli) ergo D Z maior eſt, quàm D F, & D Y minor, quàm D G; & propterea quodlibet punctum Z circuli ſupra A ſumptum cadit extra coniſectionem B F A, & quodlibet infimum punctum Y eiuſdem circuli cadit intra eandem coniſectionem A G; quapropter circumferentia circuli Z A Y ſecat coniſectionem B A G in A. Poſtea quia recta A x contingens ſectionem in A perpendicularis eſt ad breuiſecantem D A, cum I A ſit breuiſsima; igitur recta linea x A, quæ perpendicu-
29. 30. huius. laris eſt ad radium D A, continget circulum Z A Y. Quapropter circulus Z A Y ſecant coniſectionem B A G in A, & tangit eandem rectam lineam A x, quàm contingit ſectio conica B A G, & in eodem puncto A, quod erat oſtendendũ.

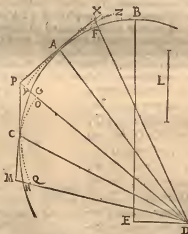
COROL-

COROLLARIVM.

Hinc constat, supremam circuli peripheriam A Z cadere in locum à tangente X A, & conisectionem B A contentum, infimam vero circumferentiam A Υ cadere ne dum infra tangentem, sed etiam infra conisectionem A G; eoquod recta A X cadit extra circuli peripheriam A Z, quàm contingit in A, & eadem circumferentia A Z cadit extra sectionem A B, quàm secat in A, vt dictum est.

Mirabile quidem hoc videri poterit aliquibus, qui contingentiæ angulos, quos vocant, verè angulos esse censent; nam hìc duæ circumferentiæ curuæ, conica nimirum B A G, & circularis Z A Υ se mutuo secant in A, & tamen ambo tanguntur ab eadē recta linea A X in eodem puncto A, in quo illæ se mutuò secant. Vnde colligent etiam, quod anguli contingentiæ facti à conisectione B A G, & recta linea X A non sunt æquales inter se, quando punctum A in vertice axis non existit; nam duo anguli contingentiæ circumferentiæ circularis, & rectæ tangentis X A æquales sunt inter se: at angulus contingentiæ sectionis conicæ supremus respiciens verticem B maior est angulo contingentiæ circularis, vt dictū est: infimus vero angulus contingentiæ à sectione conica, & eadem tangente contentus minor est eodem angulo contingentiæ circularis, & propterea supremus angulus contingentiæ sectionis conicæ maior erit inferiori.

PROP. 11. Addit. Ex 51. 52. 53. huius.



Sit perpendicularis D E minor trutina L, sintque D A, & D C duo illi rami, qui tantummodo breuisecantes esse possunt omnium ramorum ex concursu D ad sectionem B C cadentium; atque centro D, interuallo D A describatur circulus Z A Υ; pariterque centro D, interuallo D C describatur circulus O C Q; ducanturque rectæ X P, M P contingentes conisectionem in A, & C. Dico, circulū Z A Υ contingere conisectionem in A, & extra ipsam cadere, at circulum O C Q contingere eandem conisectionem in C, & intra ipsam cadere.

Ducantur quilibet rami D F, D G supra, & infra breuisecantem D A, secantes circulum Z A Υ in Z, & Υ; pariterque ducantur quilibet rami D G, O D N

D N supra, & infra breuisecantem D C, secantes circulum O C Q, in O, & Q, dummodo D G non ducatur infra D C in primo casu, nec supra D A in secundo. Quoniam ramus D A supremus duorum breuisecantium maximus est omnium ramorum cadentium ad peripheriam B A C; igitur D A maior 72. huius. *erit, quàm D F, & quàm D G; sunt verò D Z, & D Y aquales eidem D A (cum sint radij eiusdem circuli) ergo D Z maior est, quàm D F; pariterque D Y maior est quàm D G: & propterea duo qualibet puncta Z, Y eiusdem circuli Z A Y cadunt extra conisectionem B A G; & ideo circulus Z A Y tantummodo in puncto A conisectionem extrinsecus tangit.*

Postea quia ramus D C infimus breuisecantium est minimus omnium ramorum cadentium ex D ad peripheriam A C N; ergo ramus D C minor est, quàm 72. huius. *D G, & quàm D N: sunt vero D O, D Q aquales eidem D C (cum sint radij eiusdem circuli) igitur D O minor est, quàm D G: pariterque D Q minor est, quàm D N: quare qualibet duo puncta O, Q circuli O C Q hinc inde à puncto C cadunt intra conisectionem B C N, & ideo circulus O C Q intrinsecus contingit conisectionem in C, quod erat ostendendum.*

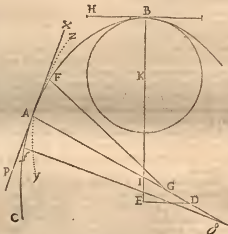
PROP. 12. Addit.

Si ad conisectionem, vel ad portionem quadrantis ellipsis B A C, ex concursu D duci non possit, nisi vnicus tantum breuisecans D A, atque centro D, interuallo D A circulus Z A Y describatur; Dico, omnium circulorum tangentium eandem rectam lineam X A P (quàm cōtingit quoque conisectio in A) vnicum esse circulum

culum Z A Y, qui conisectionem in puncto A secat.

Sumatur enim quodlibet punctum G in productione breuissimæ A I supra, vel infra punctum D: manifestum est (ex 8. præcedentium proposit.) à puncto G duci posse duos breuisecantes ramos, quorum A G erit infimus, si punctum G cadit supra punctum D, & tunc circulus radio G A descriptus continget conisectionem intrinsecus in A: si vero punctum g cadat infra punctum D, tunc pariter ex g duo breuisecantes duci possunt ad sectionem, quorum supremus erit g A; & propterea circulus radio g A descriptus continget conisectionem B A C extrinsecus in A; quapropter circulus radio D A descriptus (quem contingit eadem recta linea X A quæ tangebat sectionem in A) vnicus erit, qui sectionem B C secet in A, quod erat ostendendum. 11. Additarũ. 8. Additarũ. 11. Additarũ.

Circulorum omnium intrinsecus tangentium conisectionem non in axis vertice, assignari non potest maximus: tangentium vero intrinsecus sectionem in termino axis maximus erit, cuius radius æqualis est semirecto. PROP. 13. Addit.



Repetatur figura, & hypothesis præcedẽtis propositionis. Quoniã quilibet circulus radio G A minori, quàm D A descriptus semper intrinsecus tangit conisectionem in A (vt in præcedẽti propositione dictum est) vbicumque ponatur centrum G supra punctũ D; neque augendo radium G A efficitur alius contactus circuli, & sectionis, quàm intrinsecus, & tunc primo circulus desinit intrinsecus tangere sectionem in A, quando D A efficitur radius, scilicet quando non amplius intrinsecus sectionem tangit, sed eam secat in A; quapropter assignari non potest maximus circulorum tangentium intrinsecus sectionem in A. Quod vero circulorum intrinsecus tangentium eandem sectionem in vertice axis B, ille, cuius radius B K æqualis est semierecto B H sit maximus, ostensum est à Maurolico propos. 5. 8. & 11. libri 5. Conicorum. Patet ergo propositum.

Iisdem positis: dico circulorum omnium extrinsecus tangentium conisectionem minimum assignari non posse. PROP. 14. Addit.

Sumpto in eadem figura quolibet puncto g infra punctum D, quoniam circulus radio g A descriptus contingit extrinsecus conisectionem in A, nec vnquam cessabit prædictus cõtactus extrinsecus, licet magis, ac magis in infinitum punctum g ipsi D propinquior fiat, & tunc demum cessat huiusmodi extrinsecus contactus, quando describitur circulus radio D A, qui quidem sectionem secat in A, vt dictũ est; quapropter minimus omniũ extrinsecus sectionem tangentium in A assignari nequit. Quod vero extrinsecus tangentium eandem sectionem in vertice axis B non possit assignari minimus, patet; nam omnes circuli, quorum radij maiores sunt semierecto sectionis, eam extrinsecus tangunt; & tunc demum eiusmodi contactus extrinsecus cessat, quando radius circuli æqualis efficitur semierecto: at tunc intrinsecus sectionem tangit; quapropter reperiri non potest minimus circulorum conisectionem extrinsecus tangentium: quod erat ostendendum.

11. Addit.

Maurol. 4. 7. & 10. lib. 5. Conic.

Ex dictis colligitur, quod ex concursu ad quamlibet conisectionem possunt duci tres, vel quatuor ramisecantes inter se æquales: in ellipsi vero, & in reliquis sectionibus si rami secantes non fuerint, duci potest vnus, vel duo rami inter se æquales.

Nam circulus radio alicuius breuisecantis descriptus tangit, vel secat conisectionem, & siquidem eam extrinsecus tangit, necessario eandem bis secat; si fuerit parabole, aut hyperbole, quæ infinitè augẽtur, & dilatãtur; & propterea radij circuli ad occursus, & contactum ducti æquales sunt inter se; & ideo tres rami tantum erunt æquales: si vero describatur circulus, cuius centrum est concursus, radius vero minor est maximo, & maior minimo duorum breuisecantium: tunc quidem necessario circulus quatuor in punctis sectioni conicæ occurret: & propterea quatuor radij ad occursus ducti erunt inter se æquales.

At in ellipsi si concursus fiat circuli centrum, radius vero breuisecans maximus trium, qui in ea duci possunt, circulus prædicto radio descriptus continget quidem exterius ellipsim, neque deinceps vnquam ei occurret: & propterea ramus ille maximus erit vnicus, cum nullus alius ei æqualis duci possit in eadem ellipsi: si verò à concursu in productione axis ellipsis posito describatur circulus, cuius radius minor sit maximo ramo, sed maior vtroque terminato; tunc quidem circulus duobus in locis ellipsi occurret; & propterea duo tantum rami inter se æquales erunt; pari modo, quando à concursu tres breuisecantes ad ellipsim educun-

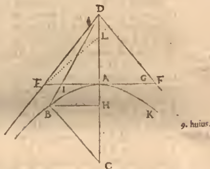
educuntur, tunc quidem circulus, cuius centrum est concursus, radius vero minor maximo breuisecantium, & maior duobus reliquis necessariò ellipsin duobus in locis secabit; & ideo duo tantummodo rami inter se æquales erunt.

SECTIO DECIMAQVINTA

Continens Propos. XXXXI. XXXXII. XXXXIII. Apollonij.

PROPOSITIO XXXXI.

a IN hyperbola angulus contentus à linea breuissima, & à mensura minor est angulo compræhenso à linea distante cum cõtinente.



b Sit hyberbole A B, eius axis D C, linea breuissima B C, duo continentes D E, D F, & distantia sit A E, & dimidium erecti A G: Dico, angulum B C D minorem esse angulo D E A. Educamus itaque perdendicularem B H, & iungamus B D, quæ secet A E in I. Quia D A ad A G est, vt D H ad H C (14. ex 5.) & I A ad A D est, vt B H ad H D; ergo ex æqualitate I A ad A G, eandem proportionẽ habebit, quàm B H ad H C, & propterea E A ad A G, nempe D A ad distantiam A E maiorẽ proportionem habebit, quàm B H ad H C igitur angulus B C H minor est, quàm D E A, quod erat ostendendum. 9. huius.

PROPOSITO XXXXII.

a IN parabola lineæ breuissimæ productæ occurrunt sectioni ex vtraque parte.

Quoniam breuissima est linea recta secans diametrum paraboles intra sectionem; & propterea sectioni occurret ex vtraque parte (28. ex pr.) & hoc erat ostendendum. 27 lib. 1.

PROPOSITIO XXXXIII.

SI inclinatus axis hyperboles erectum non excedit, nulla linearum breuissimarum sectioni ex altera parte occurret: si verò maior illo fuerit, tunc breuissimarum linearum aliquæ occurrunt sectioni, aliquæ verò non occurrunt. a b

Sit priùs D A non maior, quàm A G: & quia D A ad A G eandē proportionem habet, quàm quadratum D A ad quadratum A E, erit D A non maior quàm A E; & propterea angulus D E A non erit maior angulo E D A: sed maior fuerat angulo B C H (41. ex 5.) ergo angulus E D A, nempe A D F maior est, quàm B C D, & propterea B C, D F non conueniunt ad partes C, F; igitur B C non occurrit sectioni ad partes K, A; eo quod si illam secaret, etiam ipsi D F occurreret (8. ex 2.) quare non occurrit sectioni in duobus punctis. c

Deinde sit D A maior, quàm A G habebit E A ad A G maiorem proportionē, quàm ad A D; & ponatur I A ad A G, vt E A ad A D; ergo I A minor est, quàm E A, quare recta D B, illam diuidens, occurret sectioni, & cadat in B, ducaturque linea breuissima B C, & B H perpendicularis ad D C; erit I A ad A D, vt B H ad H D; estque D A ad A G, vt D H ad H C; ergo I A ad A G, nempe E A ad A D est, vt B H ad H C, & propterea duo triangula E A D, B H C sunt similia; igitur angulus B C H æqualis est E D A, nempe F D A; quare B C, D F sunt parallelæ, nec possunt se se mutuo secare; ergo B C non occurret sectioni K A. Lineæ vero breuissimæ, quæ in peripheria A B cadunt, continent cum C A angulos minores angulo B C D (26. 27. ex 5.) vnde non occurrent ipsi D F, & propterea neque sectioni occurrent. At ille, qui cadit extra hanc sectionis peripheriam; si producatur continet cum C D angulum maiorem angulo B C D (26. 27. ex 5.) igitur productus occurrit D F, & occurrit sectioni A K: quod erat ostendendum.

Secunda lib. 2.

14. huius.

13. lib. 2.

Conuerſ. 8. lib. 2.

Notæ in Propoſ. XXXXI.

ANgulus contentus à breuissima linea, & mensura minor est angulo contento à distante cum continente in sectione, &c. *Adycio particulam*

ticulam in hyperbole, *quæ in textu desideratur. Vocat interpres Arabicus lineam distantem ipsam A E, quæ contingit hyperbolem in vertice axis A, & interponitur inter verticem A, & continentem, seu asymptoton D E.*

b Sit sectio, D C diameter illius, &c. *Legendum puto; Sit hyperbole A B eius axis D C. Postea quia D A, ad A G, seu latus transuersum ad rectum est, vt D H ad H C, atque I A ad A D est, vt B H ad H D (propter similitudinem triangulorum I A D, & B H D) ergo ex æqualitate ordinata I A ad A G est vt B H ad H C: deinde quia linea A E media proportionalis est inter semiaxim transuersum D A, & semierectum A G, cum quadratum ipsius A E quadrans sit figuræ quæ ad diametrum per A ductum constituitur; igitur E A ad A G erit, vt D A ad A E, est vero E A maior, quàm I A; igitur I A ad A G minorem proportionem habet, quàm E A ad A G, seu quàm D A ad A E: erat autem B H ad H C, vt I A ad A G: igitur B H ad H C minorem proportionem habet, quàm D A ad A E: fiat postea L A ad A E, vt B H ad H C circa angulos rectos A, H, coniungaturq; L E, manifestum est, L A minorem esse D A, & angulum A E L minorem esse angulo A E D: sed propter similitudinem triangulorum B H C, L A E est angulus C æqualis angulo A E L; & proptrea angulus A E D maior est angulo B C H.* Ex 14. huius. 3. lib. 3.

Notæ in Propos. XXXXII.

a QVia est linea recta secans diametrum paraboles; &c. *Addo illam particulam* breuissimam, *quæ in textu desiderari videtur.*

Notæ in Proposit. XXXXIII.

a INclinatum si non excedit erectum, nulla linearum, &c. *Addo, quæ euidenter deficiunt in textu, legi enim debet: Axis inclinatus idest transuersus si non excedit erectum, &c.*

b Et quia D A ad A G est vt quadratum D A ad quadratum A E, &c. *Eo quod quadratum A E æquale est quartæ parti figuræ, quæ ad duplam semiaxis D A applicatur, scilicet æquale est rectangulo D A G; igitur D A, A E, A G sunt continuæ proportionales: ponitur vero D A æqualis, aut minor, quàm A G; igitur D A æqualis, aut minor quoque erit, quàm A E; & propterea in triangulo D E A erit angulus D E A æqualis, aut maior angulo A D E, seu A D F (cum angulus continentiæ secetur bifariam ab axi) & prius erat angulus C minor angulo A E D; igitur angulus B C D minor erit alterno angulo F D C; vnde constat rectas lineas F D, C B concurrere posse, si vlterius producantur ad partes D, B; non autem ad partes C, & F.* 3. lib. 2. 41. huius.

c Quia si occurreret illi occurreret D F (7. ex 2.) secaretque sectionem in duobus punctis, &c. *Sensus huius textus talis est. Quoniam, vt ostensũ est, recta B C infinite producta non occurrit asymptoto D F ad partes F C; igitur recta C B producta non secabit peripheriam hyperboles ad partes K; nam si ipsam secaret, secaret quoque asymptoton D F ad partes F, quod non ponitur. Ex his inferri debet conclusio principalis, nimirum, quod B C non occurrit sectioni duobus in punctis: & hac ratione textum alioqui corruptum emendaui.* 8. lib. 2. Ibidem.

Lineæ

d

Lineæ vero breuissimæ, quæ cadunt ad peripheriam sectionis B A, continent angulos minores, quàm B C D, vtique non occurrunt D F, &c. *Idest: quia qualibet breuissima ex puncto peripheriæ A B ad axim ducta efficit angulum propinquiorem vertici, minorem ipso angulo C; & propterea qualibet breuissima ad peripheriam A B extensa secabit necessario ipsam B C vlterius productam ad partes C: sed prius ostensa fuit B C parallela asymptoto D F; igitur qualibet breuissima ad peripheriam A B educta idest inter parallelas posita non occurret alteri æquidistantium D F ad partes F, sed ad partes oppositas versus D; eo quod qualibet recta linea intra hyperbolam ducta non secat peripheriam sectionis in ea parte, in qua continentem D F nõ secat; At qualibet alia breuissima infra C B ducta, necessario efficiet ad axim angulum maiorem, quàm C; & propterea vlterius producta secabit ipsam B C ad partes C; sed qualibet breuissima extra parallelas posita qua secat vnam æquidistantium B C, secabit quoq; reliquam ad easdem partes F C; quare prius sectioni occurret, vt dictum est.*

26. 27. huius.

28. huius.

Conuers. 8. lib. 2.

26. 27. huius.

28. huius.

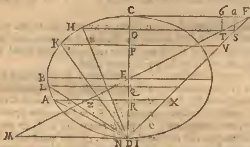
SECTIO DECIMASEXTA

Continens XVI. XVII. XVIII. Propos. Apollonij.

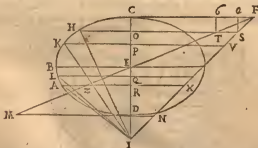
SI mensura comparata sumpta fuerit in axe recto minore ellipsis, erit maximus ramorum ab eius origine egredientium, & illi propinquior maior est remotiore: minimus vero ramorũ est differentia recti, & comparatæ, & illi propinquior, minor est remotiore, atque excessus quadrati comparatæ supra quadratum cuiuscunque rami assignati æqualis est exemplari applicato ad abscissam illius rami, siue comparata sit minor, aut æqualis, aut maior recto. a

Sit D C rectus axis minor sectionis ellipticæ A B C sitque C I comparata, & rami I H, I K, I B, I L, I A, I D, & semissis erecti sit C F, & centrum E, & edu-

educamus F E quousque secet D M perpendicularem ad axim in M, & F I occurrat D M in N, & ducantur ad axim perpendiculares H O T S, K P V, B E, L Q, A R: & sit in prima figura C I minor recto, in secun-
b da æqualis, in tertia vero maior. Constat, quemadmodum demonstrauimus in propositione sexta huius, quod quadratum I C æquale sit duplo trianguli I C F; at quadratum O H duplum est trapezij O T F C (1. ex 5.) & quadratum I O duplum est trianguli O I S; ergo quadratum I C, nempe duplum trianguli I F C excedit quadratum I H duplo
c trianguli F T S, quod est æquale rectangulo T a: & constat, vti dictum



est, quod sit exemplar applicatum ad O C; ergo quadratum I C excedit quadratum I H exemplari applicato ad O C abscissam ipsius I H. Patet etiam, quod quadratum I C excedit quadratum I K exemplari applica-
d to ad P C; idemque constat in I B; igitur I C maior est, quàm I H, & I H, quàm I K, & I K, quàm I B: postea, in figura prima, & tertia,



e quia triangulum F C E æquale est triangulo D E M; ergo quadratum I C æquale est duplo trianguli N F M cum duplo trianguli D I N, quadratum vero I D æquale est duplo trianguli D I N; igitur quadratum

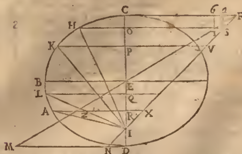
P ID

I D minus eſt, quàm quadratũ I C duplo trianguli N F M, quod æquale eſt exemplari applicato ad D C, & quadratum I R æquale eſt duplo trianguli I X R, & quadratum A R æquale eſt duplo trapezij R M (3. ex 5.) ergo quadratũ I A minus eſt, quàm quadratum I C duplo trianguli F Z X, quod æquale ex exemplari applicato ad C R (6. ex 5.) ſimiliter quadratum I L minus eſt, quàm quadratum I C exemplari applicato ad C Q; eſtque C D maior, quàm C R, & C R quàm C Q; ergo I A maior eſt, quàm I D, & I L, quàm I A; quod erat propoſitum.

Notæ in Propoſit. XVI. XVII. XVIII.

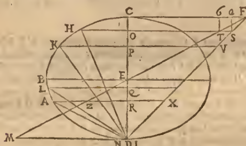
COmparata ſi fuerit ex recto duorum axium ellipſis erit maximus ramorum, &c. *Addidi particulam illam axis minoris, quæ in textu deficiebat, nunquam enim C F ſemiſsis lateris recti, eſſe poteſt maior C E ſemiſſe lateris tranſuerſi, niſi C D fuerit axis minor ellipſis.* a

Conſtat; quemadmodum demonſtrauimus in propoſitione 6. &c. *Quoniã menſura I C ſupponitur cõparata, ideſt æqualis ipſi C F ſemiſsi lateris recti; propterea triangulum I C F iſoſceleum erit, & rectangulum in C; & ideo quadratum I C æquale erit duplo trianguli I C F: eadem ratione propter parallelas S O, & C F, erit triangulum I O S ſimile triangulo I C F, & propterea illud quoque iſoſceleum erit, & rectangulum in O, & ideo quadratum I O æquale* b
1. huius. *erit duplo trianguli I O S: eſt verò quadratum O H æquale duplo trapezij F T O C; igitur quadratum I H (quod eſt æquale duobus quadratis I O, O H circa angulum rectum O) æquale erit duplo trianguli I O S cum duplo trapezij F T O C, ſed hæc duo ſpatia minora ſunt duplo integri trianguli I C F, eſtque defectus duplum trianguli F T S, ſiue rectangulum S T* b a *; igitur duplum trianguli I C F, ſiue quadratum I C maius eſt quadrato I H, & exceſſus eſt rectangulum T* a*: quod verò rectangulum T* a *ſit exemplar demonſtrabitur modo, vt in ſexta propoſitione huius.*

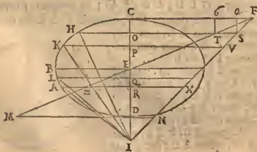


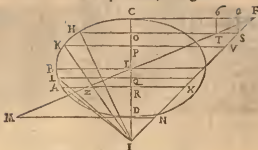
Et conſtat, vt dictum eſt, quod ſit exemplar applicatum ad O C, &c. *Quoniam rectæ S* a*, T* b*, I C ſunt parallelæ, erunt triangula I C F, & S* a *F, ſimilia;* c

similia; pariterque duo triangula E F C, T b *F similia erunt; & propterea S* a *ad* a *F eandem æqualitatis proportionem habebit, quàm I C habebat ad C F, similiter T* b *ad* b *F eandem proportionem habebit, quàm E C ad C F, seu quàm latus transuersum D C ad eius latus rectum: est vero T* b *æqualis S* a, *seu* a *F; ergo F* a *ad F* b *eandem proportionem habet, quàm latus transuersum D C ad eius latus rectum; & comparando antecedentes ad differentias terminorum, erit F* a, *seu* b *T ad* b a; *vt latus transuersum D C ad differentiam eiusdem transuersi, & recti lateris; quare parallelogrammũ rectangulum S* b, *erit exemplar applicatum ad abscissam O C.* Lem. 1. huius. Defin. 9. huius.



d Igitur I C maior est, quàm I H, & I H, quàm I K, &c. *Eo quod abscissa O C minor est, quàm C P, & C P minor, quàm C E: suntque prædicta abscissa latera homologa exemplarium, quæ ad easdem abscissas applicantur; atque prædicta exemplaria similia sunt inter se, cum circa angulos rectos latera habeant eandem proportionem, quàm latus transuersum D C ad differentiam eiusdem transuersi, & recti lateris; quare excessus quadrati I C supra quadratum I H minus est excessu eiusdem quadrati I C supra quadratum I K; & adhuc minus excessu quadrati I C supra quadratum I B, & propterea recta I C minori excessu ipsam I H superabit, quàm ipsam I K; & adhuc minori excessu superabit I K, quàm excedat I B; & ideo I C maior erit, quàm I H, & I H maior, quàm I K, & I K maior, quàm I B.* Defin. 9. huius.





Ergo quadratum I C æquale eſt duplo trianguli N F M cum duplo trianguli D I N, &c. *Quoniam quadratum I C æquale eſt duplo trianguli I C F, ſeu duplo trianguli I F E vna cum duplo trianguli E F C; eſtque duplum trianguli E D M æquale duplo trianguli E C F; igitur quadratum I C æquale eſt duplo trianguli I F E vna cum duplo trianguli E M D: ijs vero triangulis æquatur duplum trianguli N F M vna cum duplo trianguli D I N; igitur quadratum I C æquale eſt duplo trianguli N F M vna cum duplo trianguli D I N: eſt vero quadratum I D æquale duplo trianguli D I N; igitur exceſſus quadrati I C ſupra quadratum I D eſt triangulum N F M bis ſumptum; ſcilicet exemplar applicatum ad latus tranſuerſum D C.* e f

SECTIO DECIMASEPTIMA

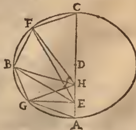
Continens XIX. XX. XXI. XXII. XXIII. XXIV. & XXV. Propoſ. Apollonij.

PROPOSITIO XIX.

SI menſura E C ſumatur in axe minori ellipſis A B C, ſitque maior comparata; erit maximus omniũ ramorũ egredientiũ ex ſua origine, vt E F, E B, E G; & maximo propinquior, maior erit remotiore, nempe E F, quàm E B, & E B, quàm E G. a

Coniungamus rectas A G, G B, BF, F C; & ſecetur C H æqualis comparatæ: iungãturque F H, H B, H G. b

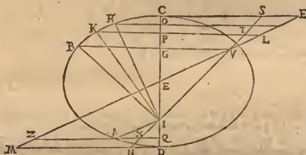
Et quoniam H C maior eſt, quàm H F, (16. 17. 18. ex 5.) erit angulus H C F minor, quàm H F C; & ideo multo minor erit, quàm E F C, quare E C maior eſt, quàm E F: & ſic conſtat, quod E F maior ſit, quàm E B, & E B, quàm E G, & E G, quàm A E; quod erat oſtendendum.



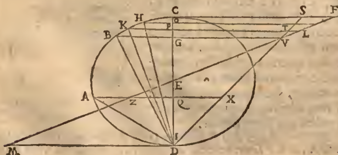
PROP.

PROPOSITIO XX. XXI. & XXII.

a SI in ellipsi A B C mensura I C in axe minori C D sumpta minor fuerit comparata, C F, & maior dimidio axis E C, (perficiaturque figura, vt antea) dico, quod omnium ramorum I A, I B, I K, I H, I C egredientium ex origine I maximus



est I B, cuius potentialis B G abscindit à mensura versus originem rectam G I, ad quàm inuersa E G eandem proportionem habet, quàm D C ad eius erectum; Et quadratum maximi I B superat quadratum cuiuslibet alterius rami I K exemplari applicato ad G P differentiam eorum abscissarum.



Quo-

Quoniam proportio E G ad G I facta est, vt E C ad C F, nempè E G ad G V, erit G V æqualis G I; & propterea quadratum G I æquale est duplo trianguli G I V, & quadratum G B æquale est duplo trapezij G F (1. ex 5.) ergo quadratum I B æquale est duplo trianguli I C S cum b

duplo trianguli F S V; & sic constat, quod quadratum I K æquale est duplo trianguli I C S cum duplo trapezij S L; & propterea quadrati I B excessus supra quadratũ I K æqualis erit duplo trianguli L T V, quæ æqualia sunt exemplari applicato ad G P (6. ex 5.) atque sic ostendetur, quod I B potentia superat I H; estque excessus exemplar applicatum ad G O, & superat quoque I A potestate, estque excessus æqualis exemplari applicato ad G Q; est vero G O maior, quàm G P; ergo I B maior est quã I K, & quàm I H; & sic ostendetur, quod I B maior sit, quàm I A; & hoc erat ostendendum.

PROPOSITIO XXIII. & XXIV.

E Contra, si maximi rami origo ponatur in axi minore, at non in cẽtro ellipsis, nec sit mensura continet cum ipsa mensura angulum acutum, & eius inuersa ad abscissam à potentiali cum origine habet eandem proportionem figuræ axis recti minoris: si vero educatur ex centro, erit perpendicularis super rectum. a

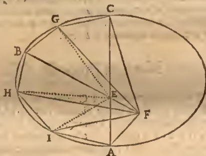
Sit sectio elliptica A B C centrum D, & E origo, quæ sit in axi minori C A, & E F ramus omnium maximus; erit vtique E C, vel maior b

semie-

semierecto, aut æqualis, aut minor illo; sed si esset æqualis, aut maior esset quoque E C maximus ramorum (16. 17. 18. 19. ex 5.) ergo C E mi-
c nor est dimidio erecti, & ideo aliqua minor, quàm D C ad residuam vsq; ad E eandem proportionẽ habebit, quàm D C ad semissim erecti; & sit D G ad G E, & ex G ad axim ducamus perpendicularem: hanc, dico, occurrere sectioni in F; alioquin occurrat ei in H, & iungamus E H; igitur E H est maximus ramus (20. ex 5.) & propterea maior, quàm E F, qui maximus suppositus fuit, & hoc est absurdum; igitur occurrit sectioni in
d F; & quia G est rectus angulus, erit F E G acutus. Si verò ramus maximus educatur *ex* cẽtro, vt D B erit perpendicularis super A C; alioquin educatur D I perpẽdicularis ad axim; igitur D I est semissis axis transuersi (11. ex 5.) & propterea est ramus omnium maximus, sed D B suppositus fuit maximus, quod est absurdum, vti dictum est; quare patet propositum.

PROPOSITIO XXV.

a SI in ellipsi ramus maximus E B mẽsuram secans vltra originem E, in axe eius minori existentem, producatur ad F, fiet F B maximus omniũ ramorum F G, F H, F I, ab eodem puncto, ad sectionem A B C cadentium, & propinquior maximo maior est remotiore.



b Educamus B G, B H, H I, I A, E G, E H, E I; & quia E B maior est, quàm E H, erit angulus B H E maior, quàm E B H; igitur angulus B H F multo maior erit, quàm H B F, & propterea B F maior, est quàm F H; atque sic demonstrabitur, quod H F maior sit, quàm F I, & F I, quàm F A; & hoc erat ostendendum.

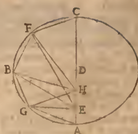
Notæ in Proposit. XIX.

a SI vero fuerit mensura E C ex recto duorum axium ellipsis A B C; sed sit maior comparata, &c. *Similiter hic declarari debet, quod axis rectus sit minor; & propterea lego: Si mensura E C sumatur in axe minori ellipsis, &c.*

Nam

b

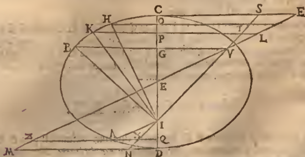
Nam si coniungamus A G, B G, B F, F C, &c. *Idest; secetur C H æqualis comparata, seu semissi lateris recti axis A C; quia mensura E C supposita est maior comparata, erit quoque E C maior, quàm C H, & propterea recta linea E F cadet infra H F; ideoque angulus C F E maior erit angulo C F H: eadem ratione angulus F B E maior erit angulo F B H, atque angulus B F E minor erit angulo B F H, & sic de reliquis, cumque C H sit æqualis comparata, & sit*



16.17.18. huius. *maior C D semisse axis recti minoris, omnium ramorum ex origine H ad ellipsim C F B G, cadentium maximus erit H C; & propterea H C maior erit, quàm H F, & in triangulo H F C angulus H F C oppositus maiori lateri maior erit angulo C; estque ostensus angulus E F C maior angulo H F C; igitur in triangulo C E F erit angulus C F E maior angulo F C E; & propterea ramus E C maior erit, quàm E F: simili modo, quia ramus H F propinquior*
Ibidem. *maximo maior est remotiore H B, erit angulus H F B minor angulo H B F: ideoque angulus E F B, pars minoris, adhuc minor erit angulo E B F, maiorem excedente; & propterea in triangulo E F B erit ramus E F propinquior maximo E C, maior remotiore E B, &c.*

Notæ in Proposit. XX. XXI. XXII.

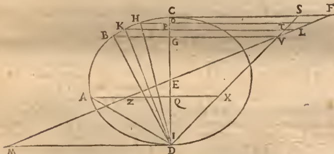
SI vero fuerit mensura I C minor comparata, quæ sit C F, nempe semisse erecti, & maior dimidio recti E C, & origo sit in recto, aut in eius productione, vt in I; tunc maximus ramorum egredientium ex origine, vt I A, I B, I K, I H est cuius inuersi proportio E G (post absolutionem figuræ cum perpendicularibus, & lineis præcedentibus) ad ab- a



scissam eius potentialis ex mensura cum origine, vt I G est, vt proportio figuræ recti, vt D C ad erectum illius, & quadratum eius, nẽpe quadratum

dratum maximi, qui est I B, superat quadratum cuiuslibet illorum exemplari applicato absciſsionibus eorum potentialium, &c. *Sensus huius textus pene vix diuinari potest inter tot menda, & phrasis Arabicæ obscuritatem; puto tamen, eum esse, quem in textu apposui, vbi paucula verba immutaui, quæ desiderari videbantur, aliqua verò transposui, vt sensus continuari posset.*

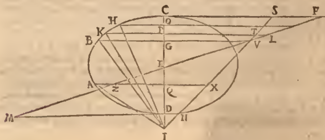
Cæterum animaduertendum est in hisce propositionibus, sicuti in 8. 9. & 10. huius libri supponi vt res manifesta intra sectionem duci posse à puncto originis ramum maximum, vel breuissimum, idest necessario reperiri debere ramum, cuius potentialis abscindit à mensura versus originem rectam lineam, ad quàm inuersa eandem proportionem habeant quàm axis transuersus ad suum erectum: hoc autem sine demonstratione admittere nefas est. Ergo quod in textu desideratur suppleri potest hac ratione. Quia C I maior est, quàm C E, sed minor, quàm C F; ergo eadem E C ad minorem C I maiorem proportionẽ habet, quàm ad C F; & comparando antecedentes ad differentias terminorum C E ad E I maiorem proportionem habebit, quàm E C ad differentiam ipsius C F à C E; quare aliqua magnitudo minor quàm prima scilicet G E ad E I eandem proportionem habebit, quàm C E ad differentiam ipsarum C F, & C E: & iterum comparando antecedentes ad summas terminorum E G ad G I eandem proportionem habebit, quàm E C ad C F; quare punctum G cadet intra sectionem, pariterq; G B ad axim perpendicularis occurrens sectioni in B cadet intra eandem sectionem: & ideo duci poterit ramus I B, qui ostendetur maximus reliquorum omnium.



b Quoniam proportio G E ad E I facta est, vt E C ad C F, &c. *Nam vt axis D C ad eius erectum, seu vt semiaxis E C ad semierectum C F, ita facta est E G ad G I: sed propter parallelas G V, & F C: & similitudinem triangulorum E G V, E C F est E G ad G V, vt E C ad C F; & propterea eadem E G ad duas G V, & G I habebit eandem proportionem, & ideo I G æqualis erit G V, & triangulum I G V isosceleum, & rectangulum erit in G; quare quadratum I G duplum erit trianguli I G V: est verò quadratum B G æquale duplo trapezij G C F V; idest duplo trapezij G C S V, cum duplo trianguli F S V; igitur quadratum I B (quod est æquale duobus quadratis I G, G B circa angulum rectum G) æquale est duplo trianguli I G V duplo trapezij G* 1. huius.

Q c S V

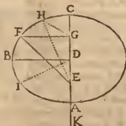
C S V cum duplo trianguli F S V; idest quadratum I B æquale est duplo trianguli I S C cum duplo trianguli F S V; & quoniam propter parallelas C S, & G V, triangulum I C S simile est isoscelio, & rectangulo triangulo I G V, erit, quadratum I C æquale duplo trianguli I C S isoscelei, & rectanguli in C; ergo excessus quadrati I B supra quadratum I C æquale est duplo trianguli F S V; est verò rectangulum, cuius basis F S, altitudo verò C G æquale duplo trianguli F S V; atque huiusmodi rectangulum est exemplar applicatum ad abscissam G C, vt in notis prop. 16. 17. & 18. *litera* c. *ostensum est igitur quadrati I B excessus supra quadratum I C est exemplar applicatum ad abscissam G C; Simili*



modo quadratum I K ostendetur æquale duplo trianguli I C S vna cum duplo trapezij L T S F; atque dupli trianguli I C S cum duplo trianguli F S V excessus supra duplum trianguli I C S cum duplo trapezij L T S F est duplum trianguli L T V; ergo quadrati I B excessus supra quadratum I K est duplum trianguli L T V, seu exemplar applicatum ad G P differentiam abscissarum. Postea quia triangula similia E C F, E D M sunt æqualia, cum eorum homologa latera E C, E D æqualia sint; ergo addito communi triangulo I E V, erit triangulum E C F cum triangulo E I V, seu triangulũ I C S cum triangulo F S V æquale duobus triangulis E D M, & I E V, seu duobus triangulis M V N, & N I D: erat autem quadratum I B æquale duplo trianguli I C S cum duplo trianguli F S V; igitur quadratum I B æquale erit duplo trianguli M N V cum duplo trianguli N I D; estque quadratum I D æquale duplo trianguli isoscelei, rectanguli I D N; igitur quadratum I B superat quadratum I D, estque excessus duplum trianguli M N V seu exemplar applicatum ad G D. Tandem quia quadratum I Q æquale est duplo trianguli isoscelei rectanguli I Q X, atque quadratum Q A æquale est duplo trapezij Q M; igitur quadratũ hypothenusæ I A æquale est duplo trianguli I D N cum duplo trapezij X N M Z; ergo excessus quadrati I A supra quadratum I D æqualis est duplo trapezij X N M Z; excessus autem trianguli N M V supra trapezium N Z est triangulum X Z V; & erat quadrati I B excessus supra quadratum I D, triangulum ipsum M V N bis sumptum. Igitur quadrati I B excessus supra quadratum I A est duplum trianguli X Z V, seu exemplar applicatum ad G Q. Quod autem exemplaria æqualia sint prædictis triangulis bis sumptis, ostensum est in prop. 6. huius.

Notæ

Notæ in Propof. XXIII. XXIV.



a E Contra linea maxima, ſi non egredia-tur ex centro, continet cum mẽſura angulum acutum, & proportio illius inuerſæ ad abſciſſam eius potentialis ex mẽſura cum origine, eſt vt proportio figuræ recti. Si verò fuerit extra centrum, erit perpendicularis ſuper rectum, &c. *Manifeſtè nõ nulla in textu Arabico deficiunt; aliqua verò immutari debent; alioquin propoſitio vera non eſſet, itaque legendum puto: E contra ſi maximi rami origo ponatur in axi minore, &c: Vt in textu habetur.*

b Sit ſectio A B C elliptica, & E origo, & E F linea maxima, &c. *Addidi pariter in hac expoſitione verba, quæ deficiunt; nimirum: Sit centrum D, & origo E, quæ ſit in axi minori A C.*

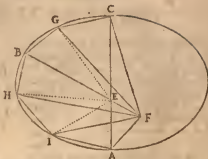
c Et ideo D C ad dimidium erecti eſt linea minor, quàm D C, & ſit D G ad G E, &c. *Nonnulla adiungi debent huic textui corruptiſsimo, ne ſint verba nil prorſus ſignificantia, itaque ſic legendum puto. Et ideo aliqua minor, quàm D C ad reſiduam vſque ad E eandem proportionem habebit, quàm D C ad ſemiſſem erecti; & ſit D G ad G E, &c. Quæ verba breuiſsimè more Apollonij expoſita ſic confirmantur. Quia E C oſtenſa eſt minor dimidio erecti axis minoris C A, fiat C K æqualis dimidio erecti; erit E C minor quàm C K, & ablata communi D C erit D E minor, quàm K D; & propterea D E ad eandem D C minorem proportionem habebit, quàm K D: fiat E D ad D G, vt K D ad D C, erit D G minor, quàm D C: & componendo, E G ad G D eandem proportionem habebit, quàm K C ad C D, & inuertendo, D G ad G E eandem proportionem habebit, quàm D C ſemiſsis axis recti ad C K ſemiſsim erecti eiuſdem axis; & ex G ducatur G F perpendicularis ad axim, quàm, dico, occurrere ſectioni in F termino maximi rami E F.*

d Et ſi maxima fuerit extra centrum, vt D B erit perpendicularis, &c. *Textus euidenter corruptus ſic corrigi debet. Si verò ramus maximus educatur ex centro, vt D B, &c.*

Notæ in Propof. XXXV.

a SI producatur vna linearum maximarum, vt E B ad latus illius originis E ad punctum F, fiet maxima linearum egredientium ab illo puncto F G, F H, F I, F A ad ſectionem B I A in directum, & propinquior illi maior eſt remotiore, &c. *Immutaui nonnulla, quæ ad propoſitionis integritatem facere videbantur: vt in textu habetur.*

Erit angulus B H E maior, quàm E B H, &c. *Eo quod ramorum omnium ab origine E ad ellipsim C B H cadentium maximus supponitur E B; ergo maior erit, quàm E H, & propterea angulus E B H minori lateri oppositus minor erit angulo E H B: cadit vero recta H F infra H E; propterea quod punctum F infra punctum E existit; igitur angulus F H B maior est angulo E H B; & ideo angulus F H B multo maior erit angulo F B H; igitur ramus F B, maiorem angulum subtendens, maior erit, quàm F H, &c.*



b

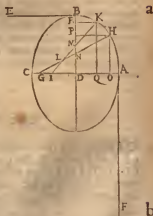
SECTIO DECIMAOCTAVA

Continens XXXII. XXXIII. XXXIV. XXXV. XXXVI. XXXVII. XXXVIII. XXXIX. XXXX. XXXXVII. XXXXVIII. Proposit. Apollonij.

PROPOSITIO XXXII.

IN ellipsi A B C rami cuiuslibet maximi G H vtrumque axim secantis portio N H inter axim maiorem, & sectionem intercepta, est linea breuissima. a

Producatur rectus axis minor A D vltra centrum D ad I, G, & ex I, G ad sectionem ducantur duo rami maximi G H, I K, qui secent transuersum B D in N, M, & sit B E dimidium erecti axis B D, & A F dimidium erecti axis A G; & educantur perpendiculares ad axes H O, H P, K Q, K R. Dico, N H breuissimum esse ramorum egredientium ex H. Quia G H est linea maxima, erit D A ad A F, nempe B E ad B D, vt D O ad O G (22. ex 5.) nempe N H ad H G, seu N P ad b



PD;

P D; ergo B E femifsis erecti ad B D femifsim tranfuerfi eft, vt N P ad P D, & ideo N H eft breuifsima linearum egredientium ex N (10. ex 5.) & fic oftendetur, quod fi K I fuerit maximus, erit K M breuiffima.

PROPOSITIO XXXIII. XXXIV.

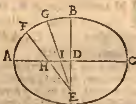
a E Contra oftendetur, quod duæ breuiffimæ, fi producantur ad partes fuarum originum vfque ad axim minorem rectũ ellipfis, fient duo maximi; & lineæ maximæ mutuò fe fecant inter tranfuerfum, & rectum in eadem parte, & quod continent cum menfura angulos, quorum proximior vertici fectiouis maior eft.

b Quia D Q ad Q I eft, vt D O ad O G, quia quælibet earum eft, vt D A ad A F (22. ex 5.) diuidendo, & permutando, fiet D Q minor ad D O maiorem, vt D I ad D G; ergo D I minor eft, quàm D G, & K Q maior, quàm H O; quare angulus I maior eft, quàm G; igitur H G, K I, fe mutuo fecantes, conueniunt in L.

Et conftat, quod occurfus duarum breuifsimarum (fi producantur verfus fuam originem) erit intra angulum contentum à duabus medietatibus axium ellipfis B D, D C fupra vnum eorum, nempe punctum L cadit intra angulum B D C. Quoniam breuifsimæ N H, M K fe mutuò fecant, fi producantur ad partes fuæ originis (28. ex 5.) occurrent vtique extra B D, & intra A G (33. ex 5.) & hoc erat oftendendum.

PROPOSITIO XXXV.

a SI per centrũ ellipfis tranfierit vna duarum breuiffimarum, vtique rami egrediẽtes ab eorum occurfu ad fectionis quadrantem alterius breuiffimæ habebunt proprietates expofitas in propofitionibus 54. & 55.

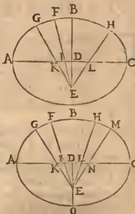


In ellipfi A B C fit punctum E occurfus duarum breuiffimarum B D, C I, & centrum fectionis D: & ex E educamus E F, quæ fecet tranfuerfum axim in H. Dico, quod H F nõ eft breuiffima, & quod breuiffima egrediens ex F abfcindit ex fagitta A C cum A lineam maiorem, quàm A H. Quoniam G I eft breuiffima; igitur F H, fi effet quoque breuiffima, occurreret ipfi G I intra angulum A D E: fed non occurrit ei, nifi in E, ergo F H non eft breuiffima; & quia F E non cadit inter duas breuifecantes E B, E G; ergo breuiffima, egrediens ex F, abfcindit ex fagitta lineam maiorem, quàm A H (54. ex 5.) quod erat oftendendum. 34. huius.

PROP.

PROPOSITIO XXXVI.

IN sectione elliptica quatuor lineæ breuissimæ, vt B D, F I, G K, H L, non conueniunt omnes in vno puncto.



Alioquin sit occursus in E, & prius sit B D perpendicularis super A C, transiens per D centrum sectionis; & quia E est occursus duarum breuissimarum B D, F I, & B E transit per centrum; igitur G K non est linea breuissima, quod est contra hypothesim. Si vero nullus eorũ transit per centrum, educamus per centrum D O perpendicularem ad A C; quare duæ breuissimæ F I, G K conueniunt intra angulum A D O (34. ex 5.) similiter H L, M N breuissimæ occurrunt intra angulum C D O (34. ex 5.) sed cõueniunt in E, quod est absurdum; igitur quatuor lineæ breuissimæ non cõueniunt in vno puncto; quod erat ostendendum.

35. huius.

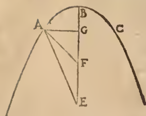
a

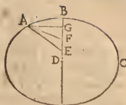
PROPOSITIO XXXVII. XLVI.

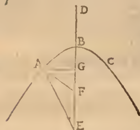
IN conisectione A B, cuius centrum D duci non possunt duæ lineæ maximæ in ellipsi, neque duæbreuissimæ in omnibus sectionibus, vt A E, A F ad vnum punctum A circumferentiæ sectionis terminatæ.

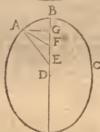
Educamus A G perpendicularem ad axim B E. Si itaque sectio fuerit parabole, fiet E G æqualis F G, quia quælibet earum est æqualis dimidio erecti (13. ex 5.) si vero fuerit hyperbole, aut ellipsis, fiet D G ad G E, vt D G ad G F; quia quælibet earum est, vt proportio figuræ (14. 15. ex 5.) igitur G F æqualis est G E, quod est absurdum. Similiter si B G fuerit minor duarum axium ellipsis, & fuerint A E, A F rami maximi ostendetur, quod G F æqualis sit G E (23. ex 5.) Patet igitur, vt dictum est, quod ex vno puncto sectionis educi non possunt ad axim illius duæ lineæ maximæ, neque breuissimæ, & hoc erat ostendendum.

PROP.



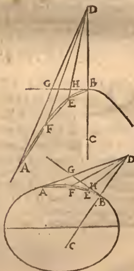






PROPOSITIO XXXVIII.

SI linea maxima, aut breuissima, vt C B, producatur extra sectionem A B ad D, erit eius portio B D extra sectionem abscissa minima omnium linearum D E, D F, D A egredientium ab illo pnncto ad circumferentiam sectionis: reliquarũ vero propinquior, illi minor est remotiore.



a Educatur B G, tangens sectionem in B; erit D B minor, quàm D H; ergo multo minor est, quàm D E: & iungamus F E, F A, erit angulus F E D obtusus, & propterea D E minor est, quàm D F, & similiter D F minor, quàm D A; quod erat ostendendum.

PROPOSITIO XXXIX.

IN ſectione A B elliptica quælibet perpendicularis F D ad lineam maximam C D, ab eius termino D in ſectione poſito educta, continget coniſectionem.

Alioquin ſecet illam, & in eius productione D G ſumatur punctum G intra ſectionem: & educamus B G C, igitur G C maior eſt, quàm C D, quia ſubtendit rectum angulum C D G, & propterea B C multo maior eſt, quàm C D, quod eſt abſurdum; igitur educta illa linea eſt tangens; quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO XXXX.

E Contra ſi fuerit F D tangens, erit perpendicularis ſuper maximam D C.

Alioquin educamus aliam E D perpendicularem ſuper illam; ergo E D tangit ſectionem in puncto D (39. ex 5.) ſed F D ſuppoſita fuit tangens; igitur duæ D F, & D E tangunt ſectionem in vno puncto, quod eſt abſurdum (36. ex 1.)

PROPOSITIO XXXXVII.

QVælibet linea D E ex puncto contactus D ad axim alicuius ſectionis A B educta perpendicularis ad tangentem D C, erit linea breuiſſima, aut maxima.

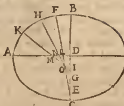
Ex 10. & 20. huius. Alioquin educamus D F breuiſſimam, vel maximam; ergo D C perpendicularis

40. huius. eſt ſuper D F; ſed C D ſuppoſita fuit perpendicularis ſuper D E; quod eſt abſurdum: quapropter demonſtratũ eſt, quod fuerat propoſitum.

PROP.

PROPOSITIO XXXXVIII.

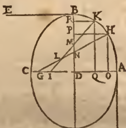
a TRes lineæ maximæ E F, G H, I K ad vnum ellipsis quadrãtem A F B cadentens non cõueniunt in vno puncto.



Alioquin cõueniant in O, & quia sunt lineæ maximæ erunt M K, H N, L F, lineæ breuissimæ (32. ex 5.) & conueniunt in puncto O; quod est absurdũ (54. ex 5.) ostensum ergo est, quod fuerat propositũ.

Notæ in Proposit. XXXII.

a LInea maxima secat transuersam in pũcto, cuius intercepta inter punctum illud, & sectionem, est linea breuissima, &c. *Verba, quæ in textu Arabico desiderantur supplenda censui, vt æquiuocationes tollerentur.*



b Quia G H est linea maxima, erit D A ad A F, nempe B E ad B D, &c. *Quia in 22. huius ostensum est, linea maxima G H potentialem H O secare semiaxim minorẽ A D in O, vt sit D O ad O G in eadẽ proportione figura axis minoris A C; scilicet erit, vt D A semiaxis minor ad A F eius semierectum; sed vt A D ad A F, ita est B E semissis lateris recti axis transuersi ad B D semissem eiusdem transuersi; igitur D O ad O G eandem proportionem habebit, quàm E B ad B D; sed propter parallelas N D, H O, est N H ad H G, vt D O ad O G; pariterque propter parallelas D G, H P, erit N P ad P D, vt N H ad H G; & propterea N P ad P D eandem proportionem habebit, quàm D O ad O G, seu quàm E B ad B D; & permutando D P ad P N erit, vt D B ad B E, seu vt axis transuersus ad eius erectum; & propterea linea N H erit breuissima.* Ex 15. lib. 1. 15. huius.

Notæ in Proposit. XXXIII. XXXIV.

a E Contra ostendetur, quod duæ breuissimæ, si educantur ex parte suæ originis ad rectum, fient duo maximi cum relatione ad rectum: Et osten-

ostendetur ex dictis, quod lineæ maximæ mutuò se secant inter diametrum, & rectum, &c. *Textũ corrigi debere manifestum est ex dictis superius.* b

Quia D Q ad Q I est, vt D O ad O G, &c. *In eadem figura propositionis 32. præcedentis perficiatur constructio, vt prius quia duæ K M, H N sunt breuissimæ li-*
Pr. 15. huius. *neæ; ergo M R ad R D, nec non N P ad P D eandem proportionem habent, scilicet eam quàm habent latus rectum ad transuersum, seu eandem quàm habet semierectus*
15. lib. 1. *E B ad semiaxim B D; est verò C A ad eius latus rectum, seu D A ad A F, vt E B ad B D; igitur tam M R ad R D, quàm N P ad P D eandem proportionem habent, quàm D A ad A F; sed propter parallelas C D, R K, P H, est M K ad K I, vt M R ad R D; pariterque N H ad H G eandem proportionẽ habet, quàm N P ad P D; atque propter parallelas D B, Q K, O H est D Q, ad Q I vt M K ad K I, & D O ad O G est vt N H ad H G; ergo tam D Q ad Q I, quàm D O ad O G eandem proportionem habent, quàm D A ad A F, seu quàm axis mi-*
20. 21. 22. huius. *nor A C ad suum erectum, & propterea tam K I, quàm H G est ramus maximus; igitur si duæ lineæ breuissimæ H G, & K I producantur quousque axim minorem secent in punctis G, & I efficientur rami omnium maximi. Postea quia D Q ad Q I, est vt D O ad O G; permutando D Q ad D O eandem proportionem habebit, quàm Q I ad O G; & permutando, & comparando antecedentes ad differentias terminorum erit D Q ad D I, vt D O ad D G: estque D Q minor quàm D O; igitur Q I minor est, quàm O G; pariterque D I minor est, quàm D G; & propterea punctum I cadit inter axim B D, & ramum H G; estque etiam potentialis K Q propinquior & parallela axi maiori, & ideo maior remotiore H O; igitur punctum K cadit inter axim B D, & ramum H G; & propterea ramus K I secat ramum H G in puncto L inter puncta H, & G:*
36. huius. *sed duæ breuissimæ K M, H N se secant vltra axim B D: igitur occursus L cadit intra angulum B D C ab axibus compræhensum. Tandem quia K I secat H G inter puncta G, & H; ergo efficit angulum externum K I A maiorem interno, & opposito G: & propterea ramus K I propinquior vertici B, quàm H G efficiet cum axe minore C A angulum A I K maiorem.*

Notæ in Proposit. XXXV.

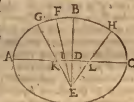
SI transeat per centrum ellipsis vna duarum breuissimarum; vtique rami, &c. *Hæc propositio parum differt à 54. & 55. huius, vbi ostensum est, quod si duo rami E B, E G breuisecantes ex eodem concursu E ad ellipsim A B ducuntur, quilibet alius ramus E F, extra breuisecantes positus, cadet supra breuissimam ex puncto F ad axim A C ductam: hic vero supponuntur duæ* a

breuif-

breuissima B D, GI, quarum B D per centrũ transit, quæ producta concurrunt in puncto E axis minoris, & concluditur, quod rami E F, portio F H, nedũ breuissima non est, sed supra ipsam breuissimã ex puncto F eductam cadit.



Sed duo hic notanda sunt. Primo, quod hæc prop. 35. non poterat postponi, nã vsum habet in 57. huius vbi malè citatur prop. 52. loco huius 35., vt ibidem insinuatum est. Secundo, quod hæc demonstratio non videtur omnino perfecta nam pendet ex prop. 34., & ex eius conuersa, quæ demonstrata non reperitur quare superuacanea non fuit noua demonstratio in Lemmat. 8. apposita.



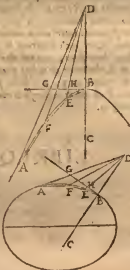
Notæ in Prop. XXXVI.

a SI verò nulla earum transit per centrũ, educamus D O, &c. *Si enim fuerint quatuor lineæ breuissimæ G K, F I, H L, M N, quarum nulla per centrum D transit, similiter ostendetur, quod non conueniunt in vno puncto E; nam ducto semiaxe minori D O necesse est, vt punctum E concursus duorũ breuisecantiũ E G, E F cadat intra angulũ A D O; pariterque idem punctum E concursus duorum breuisecantium E H, E M, cadet necessario intra angulum C D O; sed idem punctum E nequit duobus in locis reperiri, nimirũ intra angulum A D O, & intra angulum C D O, igitur non possunt ab eodẽ puncto educi ad ellipsim quatuor rami breuisecantes.* 34. huius. Ibidem.



Notæ in Prop. XXXVIII.

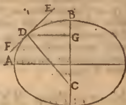
a NAm si educamus B G tangentem erit B D minor quàm D H, &c. *Quoniam C B est linea breuissima, aut si maxima est, eius portio erit breuissima, & G B cõtingens sectionem in eius termino B perpendicularis ad B C; propterea in triangulo B D H latus H D, subtendens angulum rectum B, maius erit latere D B; est verò D E maior, quàm D H, eo quod punctum H contingentis B G cadit extra sectionem; igitur linea B D minor est, quàm D E, & propterea angulus D E B acutus erit, quare est minor obtuso* 32. huius. 29. 30. huius.



angulo D B E; cadit verò F E infra rectam B E, quam secat in E, propter curuitatem sectionis F E B; igitur angulus D E F obtusus quoque erit, & angulus D F E acutus; & propterea recta linea D E minor erit, quàm D F; eadem ratione ostendetur D F minor, quàm D A.

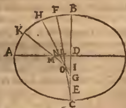
Notæ in Proposit. XXXIX.

ALioquin secet illam, & secemus ex, & D G intra sectionem, &c. *Si enim recta F D non contingit ellipsim A B, secet eam si fieri potest in D: quare F D producta in directum cadet intra sectionem, & in producta recta linea F D G sumatur quodlibet punctum G dummodo intra sectionem existat, & per G ad concursum C coniungatur recta linea G C, quæ producta occurrat sectioni in B: & quia ex hypothesi recta F D G perpendicularis erat ad maximum ramum D C, ergo in triangulo D G C rectangulo erit hypothenusa G C maior quàm D C, & ideo B C multo maior erit quàm D C; quod est absurdum, supposita enim fuit D C omnium maxima earum, quæ ex C ad sectionem A B duci possunt.* a

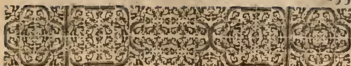


Notæ in Proposit. XXXXVIII.

ALioquin occurrant in O, quia istæ lineæ sunt maximæ, &c. *Secant enim lineæ maximæ semiaxim maiorem D A in punctis M, N, & L: & siquidem tres lineæ maximæ conueniunt in vnico puncto O,* a
32. huius. *erunt segmenta inter axim maiorem, & sectionem intercepta, nimirum M K, N H, L F lineæ breuissimæ; quarum duæ quaquè L F, N H educuntur ab eodem puncto concursus O: igitur (ex 54. 55. huius) tertius ramus O K ab eodem concursu O eductus non erit breuisecans; quod est contra hypothesim.*



LIBRI QVINTI FINIS.



APOLLONII PERGAEI
CONICORVM LIB. VI.



DEFINITIONES.

I.



Ectiones ÆQVALES ſunt, quæ ad inuicem ſuperpoſitæ ſibi mutuò congruunt.

II.

SIMILES verò ſunt, in quibus omnes potentiales ad axium abſciſſas vtrobique ſunt in ijſdem rationibus, tum abſciſſæ ad abſciſſas.

III.

Et linea, quæ ſubtendit ſegmentum circumferentiæ circuli, aut ſectionis coni vocatur BASIS illius ſegmenti.

IV.

Et linea, quæ bifariam diuidit ordinationes æquidiſtantes baſi illius, vocatur DIAMETER illius ſegmenti.

V.

Et eius terminus, qui eſt ad ſectionem, VERTEX ſegmenti.

VI.

Et SEGMENTA ÆQVALIA ſunt, quæ ſuperpoſita ſibi mutuò congruunt.

VII.

Et SIMILIA ſunt, quorum baſes cùm diametris æquales angulos continent, & in eorum ſingulis ductæ lineæ baſi parallelæ numero æquales ad abſciſſas diametrorum ſunt in ijſdem rationibus tum abſciſsæ ad abſciſsas.

VIII.

VIII.

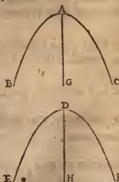
CONI SIMILES sunt, quorum axes æquè ad bases inclinati, ad diametros basium proportionales sunt.

IX.

Et dicitur conus continere sectionem, & sectio in cono posita esse, si sectio tota fuerit in superficie coni, aut cadat in illa, si producatur ex parte basis.

N O T Æ.

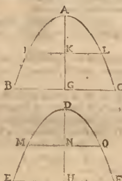
Definitiones huius sexti libri ferè omnes sunt Apollonij, in paucis quidem alteratæ ab interprete Arabico: quod quidem constat testimonio Eutocij Ascalonitæ, qui in tertiam propositionem secundi æquiponderantium Archimedis affert definitionem similium portionum conicarum sectionum, traditam ab Apollonio in eius sexto libro: & sanè ordo doctrinæ exigebat, vt prius sectiones æquales, & similes definirentur, vt postea earum symptomata demonstrari possent: sed animaduertendum est, hactenus nomen sectionis conicæ significasse quamlibet indeterminatam portionem curuæ lineæ in coni superficie ortam ex sectione alicuius plani non per verticem coni ducti, non considerando terminos eius neque mensuram. Segmentum verò significat portionem aliquam sectionis conicæ determinatæ mensuræ, & certis finibus terminatam; at multoties significat superficiem à conisectione, & recta linea eam subtendente contenta. Igitur ad confusionem vitandam vocabo huiusmodi superficiem planam, Mixtam superficiẽ sectionis conicæ. Modò in relatis definitionibus prius quanam conisectiones vocari debeant inter se æquales exponit Apollonius.



I. *Et primo; Si fuerint duæ quælibet conisectiones B A C, E D F, quarum axes A G, D H; vertices verò A, & D, & siquidem intelligatur sectio B A C superposita sectioni E D F, vt nimirum vertex A super verticem D cadat, atque axis A G super axim D H, atque pariter peripheria B A C, & E D F sibi mutuo congruant: tunc quidem vocantur duæ dictæ sectiones conicæ æquales inter se. Vbi notandum est, non oportere longitudinem curuæ B A C æqualem esse longitudini curuæ E D F; sicuti, vt duo anguli rectilinei dicantur æquales, & sibi mutuò congruentes, necesse non est, vt rectæ lineæ, angulos continentes, sint æquales longitudine, dummodo certum sit, quod lineæ ipsæ vlterius productæ semper sibi mutuò congruant; sic pariter peripheriæ conicarũ sectionum A B, & D E, si vlterius producantur, semper sibi mutuò congruent.*

II. *In*

II. *Codex Arabicus habet*. Similes verò sunt, quarum proportio potentium in vna earum ad sua abscissa est eadem proportioni aliarum potentium ad sua abscissa, & proportio abscissarum in vna earum ad sua opposita abscissa eadem est. *Putabit forte quispiam, me nimis licentiosè transformasse potius, quàm emendasse textum in hac secunda definitione; sed is sciat velim, non meo arbitratu id fecisse sed ex praescripto eiusdem Apollonij pluribus in locis; non quidem in hisce compendiosissimis definitionibus, in quibus vna particula omissa, vel addita (vt passim cõtingit in codicibus vetustissimis) sensum omninò permutat; sed ijs in locis in quibus oratione continua exponit, & exemplis declarat germanum sensum huius secundae definitionis, & septimae subsequentis, vt suis in locis monebitur. Primo igitur suppleri debent particulae* ad conterminas axium abscissas, *quae in textu omnino subintelligi debent vt expressè declaratur in propos.* 11. 12. 15. & 16. *huius libri, quibus in locis*

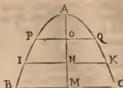


semper in sectionibus similibus praecipitur vt abscissae tantummodo in axibus sumantur, aut aequè sint inclinata ad conterminas potentiales. Secundò postrema verba sunt in ijsdem rationibus tum abscissae ad abscissas *possent retineri cũ sensum definitionis non omnino intollerabilẽ reddant: & insuper in textu greco Eutocij repetantur, & eius sensus talis est. In conisectionibus B A C, E D F, quarum axes A G, D H si ductae fuerint quotcunq; potentiales, seu ad axim applicata B C, E F, I L, M O occurrentes axibus in G, H, K, N hac lege, vt potentialis B C ad abscissam G A eandem proportionem habeat quàm potentialis E F ad abscissam H D, & potentialis I L ad abscissam K A sit, vt M O ad N D, & tandem abscissa G A ad K A sit, vt abscissa H D ad N D: & hoc verificetur in omnibus alijs potentialibus eadem lege ductis; tunc quidem duae illae sectiones similes appellantur iuxta Eutocij, & Mydorgij sententiam.*

Ego contra puto, hanc expositionem neq. Apollonio, neq. veritati conciliari posse, vt ad propos. 12. ostenditur attamen existimo, definitionem hac ratione formari posse.

Similes conisectiones sunt, in quibus qualibet axium abscissae erectis proportionales etiam ad conterminas potentiales eandẽ rationem habent: quae omnino conformis est praecedenti definitioni, praeterquam in postrema particula, vbi enim ait. Sunt in ijsdem rationibus tum abscissae ad abscissas. *Legendum esset:* sunt in ijsdem rationibus tum abscissae ad erecta. *Sed an hac particula corrigi debeat, vel non, alij videant.*

III. *Si verò fuerit portio sectionis conicae B A C, vel circunferentiae circuli, atq. recta linea B C eam subtendat, & secet in duobus punctis B, & C, vocatur B C, Basis praedicti segmenti B A C.*

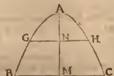


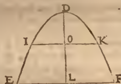
IV. *Et si in eodem segmento ducantur ordinata parallelæ basi B C, atque recta linea A M secet omnes æquidistantes ipsi B C bifariam in punctis M, N, & O vocabitur A M: Diameter eiusdem segmenti.*

V. *Et terminus eiusdem diametri A ad sectionem positus, vocatur Vertex segmenti.*

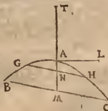
Tres prædictæ definitiones superadditæ ab interprete Arabico fuerunt, vt ego puto, quandoquidem omnino necessariæ non sunt.

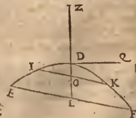
VI. *Sicuti in prima definitione sectiones sibi mutuò congruentes æquales vocabantur, sic pariter, si segmentum B A C superpositum segmento E D F sibi mutuò congruant, sunt duæ illæ lineæ curuæ æquales inter se.*



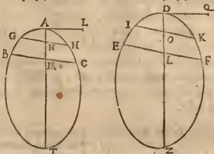


VII. *Declarat Apollonius in hac definitione septima, quænam segmenta conica similia inter se censeri debeant. Vt si fuerint duarum conicarum sectionum segmenta B A C, & E D F, quarum diametri A M, & D L efficiant cum ordinatim applicatis, seu cum basibus B C, & E F angulos æquales in M, & L, & in vnaquaque earum ductæ fuerint pares multitudines applicatarum, quæ sint basibus æquidistantes, vt G H, & I K, & in eis verificentur hæ conditiones, vt habeat B C ad abscissam M A eandem proportionem, quàm E F ad abscissam L D, & G H ad abscissam N A eandem proportionem habeat, quàm I K ad abcisam O D, & tandem abcisa M A ad abscissam A N eandem proportionem habeat, quàm abscisa L D ad abscissam D O; tunc quidem vocat Apollonius duo segmenta B A C, & E D F similia inter se. Et hîc primo animaduertendum est, difinitionem segmentorum similium relatam ab Eutocio Ascalonita in 3. prop. lib. 2. æquipond. Archimedis, non esse integram: in ea enim desiderantur illa verba*, quarum bases cumdiametris continent angulos æquales, *sine quibus definitio esset erronea, vt optime notat Mydorgius. Hoc autem ita esse verba textus Arabici aperte declarant, habent enim.* Et similia sunt quorum bases continent cum diametris angulos rectos *legẽdum æquales,*





les, & educantur in quolibet eorum ordinationes ad suas bases numero æquales, quarum proportio cum diametris est, vti diximus in sectionibus similibus. *Idem repetit in propos. 15. huius lib. rursus in propos. 16. litera* a *inquit:* Et quod anguli à potentialibus, & abscissis contenti sint æquales in duobus segmentis, erit segmentum H A G simile segmento I C K: &c. *& propos. 17. litera* c *ait:* & anguli comprehensi à potentibus, & abscissis sunt æquales; &c. propterea duo segmenta sunt similia; *Et in eadem propos. litera* d *dicit*. Quia propter similitudinem duorum segmentorum continebunt potentes cum suis abscissis angulos æquales. *Et eodem modo semper loquitur Apollonius; quare dubitandum non est, in Eutocij definitione hac eadem verba desiderari.*



Immutaui postea verba subsequentia; nam ordinationes, seu ordinatim applicata ducuntur ad diametros, non ad bases, & debent esse basibus æquidistantes. Deinde breuitas affectata postremæ partis huius definitionis non Apollonio, sed Arabico Interpreti tribui debet, nam eadem expressè, & extensè declaratur in textu Eutocij his verbis. In quarum singulis ductis lineis basi parallelis numero æqualibus, sint ipsæ parallelæ, & bases ad abscissas diametrorum partes sumptas à verticibus in ijsdem rationibus, tum abscissæ ipsæ ad abscissas. *In textu verò Arabico hac non habentur expressè, sicut in secunda definitione, quàm citat hisce verbis*. Et educantur ex quolibet eorum ordinationes basibus parallelæ numero æquales, quarum proportio cum diametris est, vti diximus in sectionibus similibus.

MONITVM.

AMOR veritatis, & muneris suscepti ratio exigere videtur, vt definitiones sectionum conicarum similium, quæ circunferuntur, accuratius examinentur, ne (vt Mydorgij verbis vtar) à magnis nominibus (Eutocium dico, Commandinum, & Mydorgium) præiudicium diutius fiat veritati, hoc autem ad propos. 11. 12. huius lib. præstabo. Interim monendus es Lector, in definitione ab Eutocio relata aliqua verba deficere (nimirum quod abscissæ in axibus, aut diametris æquè ad ordinatas inclinatis sumantur) in definitionibus Commandini aliquod desiderari, & eas me-

rito reiectas à Mydorgio fuisse, nam licet latera transuersa proportionalia sint lateribus rectis, non tamen duæ eiusdem nominis sectiones similes erunt, nisi diametri æquè inclinatæ sint ad ordinatim ad eas applicatas: tandem definitionem Mydorgij similium sectionum pariter imperfectam esse suspicor; nam licet duæ sectiones, quibus competit tradita definitio, seu passio eiusdem definitionis, sint reuera similes, non tamen è conuerso similibus sectionibus conuenit solummodo definitio, seu eius passio, cum aliquando apposita passio in eisdem reperiatur: quod perinde est, ac si quis putaret triangulum æquilaterum aliquando latera inæqualia habere posse.

VIII. *In hac definitione manifestè aliquid desideratur: inquit enim* (Coni similes sunt quorum axium proportio ad diametros suarum basium eadem est.) *Quod quidem verificatur tantummodo in conis rectis: at in scalenis debent necessario axes conorum efficere æquales inclinationes super bases: Quod quidem in sequentibus propositionibus manifestè ab Apollonio declaratur. Itaque textum hac ratione restitui debere puto. Coni similes sunt, quorum axes æque ad bases inclinati ad diametros basium proportionales sunt.*

IX. *Sectio genita in superficie coni à plano eum secante, non per verticem eius ducto dicitur in dicto cono posita, & contenta; & conus ille continere dicitur eandem sectionem: & licet conisectio exhibeatur extra conum; dicetur nihilominus contineri ab illo cono, in quo sectio illa accomodari potest, seu in quo ab aliquo plano secante effici potest in coni superficie eadem illa conisectio.*

SECTIO PRIMA

Continens Proposit. I. II. IV. & X.

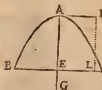
PROPOSITIO I.

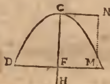
QVælibet duæ sectiones parabolicæ A B, C D, si habuerint axium erectos A I, C N æquales: erunt inter se æquales. Si verò duæ illæ sectiones fuerint æquales, erunt axium erecta æqualia inter se. a

Quoniam superposita axi C H super axim A G, cadet sectio C D super sectionem A B: si enim cadere non concedatur super illam, signetur (si fieri potest) punctum eius D, extra sectionem A B cadens: & educatur D F perpendicularis ad axim; & perficiatur planum rectangulum F N, & ab axi A G secetur A E æqualis C F; & educatur ex E b

perpen-

pespendicularis B E, & perficiatur planũ E I. Et quia A I, A E æquãtur C N, C F, vnaquæque suo homologo: igitur planum I E, nempe, (12. ex 1.) quadratum B E æquale est rectangulo F N, nempe quadrato D F (12. ex 1.) ergo B E æqualis est D F; si autem superponatur axis axi eadet D super B, quæ tamẽ haud cadere concessum fuerat: & hoc est absurdum; ergo fieri non potest, vt duæ sectiones æquales non sint. 11. lib. 1. Ibidem.

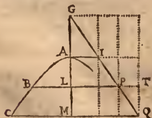


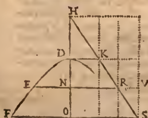


c Præterea supponamus duas illas sectiones æquales esse inter se, & fiat F C æqualis E A, & educamus ad axes perpendiculares B E, D F, & perficiamus plana rectangula F N, E I. Quia sectio A B cadit super sectionem C D, & A E super C F eadet; alioquin essent in eadem parabola duo axes: ergo F eadit super E, & D super B, & propterea B E potens planum E I (12. ex 1.) æqualis erit D F potenti planum F N (12. ex 1.); ergo duo plana sunt æqualia; sed sunt applicata ad æquales F C, A E; igitur C N, A I erectæ æquales sunt. Et hoc erat ostendendum. 11. lib. 1. Ibidem.

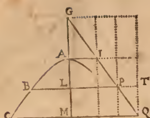
PROPOSITIO II.

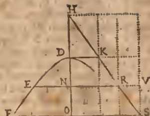
SI duæ sectiones hyperbolicæ, aut duæ ellipses A B C, D E F habuerint axium figuras G I, H K similes, & æquales;
a duæ illæ sectiones æquales erunt. Si verò duæ sectiones æquales fuerint, earũ figuræ axiũ erunt æquales, similes, & similiter positæ.





 Quoniam





Quoniam facta conuenienti superpositione axis A M super axim D O, cadet quoque sectio A B super sectionem D E: si enim non cadit super illam, sumatur (si fieri potest) eius punctum B, extra sectionem D E cadens; & producatur ad axim perpendicularis B L vsque ad P: & perficiatur planum A P applicatum comparatum; & secetur D N æqualis A L, & erigatur per N ad axim perpendicularis N E, & producatur vsque ad R, perficiendo planum D R applicatum comparatum; Et quia A I æqualis est D K, & A L æqualis D N: erit planum I L, æquale plano K N; cumque G I, H K sint duæ figuræ similes, & æquales, pariterque I P, K R; ergo duo plana A P, D R sunt æqualia: & propterea E N, B L, quæ illa spatia possunt (13. 14. ex 1.) sunt æquales. Si autem superponatur axis axi cadet B L super E N, eoquod duo anguli N, & L sunt æquales; igitur B cadit super E, quod prius cadere non concedebatur: & hoc est absurdum. Quapropter sectio sectioni æqualis est. b

12. 13. lib. 1.

Deinde ponamus duas sectiones æquales, vtique congruet sectio A B sectioni D E, & axis A L axi D N, quia si non cadit super illum, essent in hyperbola duo axes, & in ellipsi tres axes, quod est absurdum (52. 53. ex 2.) Et fiat A L æqualis D N, & reliqua perficiantur, vt prius cadent duo puncta L, B super N, E; ideoque B L æqualis erit E N; & poterunt æqualia rectangula A P, D R applicata ad æquales A L, D N (13. 14. ex 1.) ergo L P æqualis est N R. Similiter ponatur A M æqualis D O, & educantur C M Q, F O S duæ ordinationes, ostendetur, quod M Q æqualis est O S, & L M æqualis N O; & propterea duo plana P Q, R S sunt æqualia, & similia; igitur duo plana G P, H R sunt æqualia, & similia, & L P ostensa est æqualis N R: ergo G L æqualis est H N, & A L æqualis D N; & propterea G A æqualis est D H, & A I æqualis D K.

48. lib. 2.

12. 13. lib. 1.





c

d

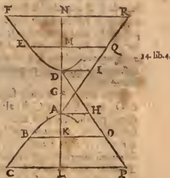
Quapro-

Quapropter duæ figuræ G I, H K sunt æquales, & similes. Quod erat ostendendum.

PROPOSITIO IV.

a Simili modo demõstrabitur, quod duæ sectiones oppositæ sint similes, & æquales.

Eo quod axis inclinatus est communis, & erecti sunt æquales (16. ex 1.) & propterea earum figuræ æquales quoque sunt inter se. Et hoc erat propositum.



14. lib. 4.

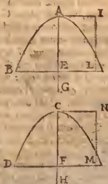
PROPOSITIO X.

a Pariter constat, quod si potentiales cum suis abscissis cõpræhendant angulos æquales obliquos, eadem consequentur, quæ prius dicta sunt.

Et hoc erat propositum.

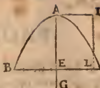
Notæ in Proposit. I.

a Qvælibet duæ sectiones parabolicæ, vt A B, C D, quarum relationes sunt duo plana A L, C M, & erecti earum A I, C N æquales. ipsæ quoque sunt æquales. Si verò duæ illæ sectiones fuerint æquales, vtique earum applicata; & erecti erunt æquales, &c. *Verba illa propositionis (* applicata sunt duo plana A L, C M, &c. *) casu in textum irrepsisse puto, eo quod rectangula illa A L, C M, nedum æqualia non supponuntur, sed è contra construuntur, atque demonstrantur æqualia esse inter se.*

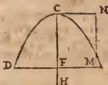


b Quia si ponamus sagittam C H super sagittã A G, cadet sectio C D super sectionem A B: si verò non cadit super illam, signemus super literam, in quam non cadit punctum D: &c. *Sic legendũ puto. Quoniam,*

niam, superposita axi C H super axim A G, &c. vt in textu habetur. Si enim axis C H super axim A G applicatur, ita vt vertices A, C coincidant, necessariò sectio C D cadet super sectionem A B alias assignari posset punctum eius D, extra sectionem A B cadens.



Præterea ponamus duas sectiones æquales, & C F æqualis A E, &c. *Textum corruptum sic restituendum censeo. Præterea supponamus, duas illas sectiones æquales esse inter se, & fiat C F æqualis A E, educamus ad axes perpendiculares B E, D F, &c. Sic enim distinguitur hypothesis propositionis à constructione eius.* c



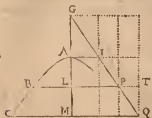
Ergo sectio A B cadit super sectionem C D, & A E super C F: alioqui essent sectioni parabolicæ duo axes; ergo F cadit super E, &c. *Quoniam (ex hypothesi) sectiones A B, & C D æquales sunt, facta intellectuali conuenienti superpositione, sibi mutuò congruent, & vertex A cadet super verticem C. Dico iam, axim A E cadere super axim C F: alioquin in eadem parabola, scilicet in duabus parabolis sibi congruentibus à communi vertice C, vel A, duo axes A E, & C F ducerentur: quod est impossibile. Quare axis A E cadit super axim C F.* d

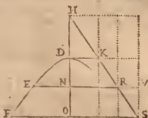
Notæ in Proposit. II.

SI fuerint figuræ duarum sectionẽm hyperbolicarum, aut duarum ellipsium, vt duo plana G I, H K in A B, D E similes, & æquales; vtique duæ sectiones æquales erunt: si vero duæ sectiones sint æquales earum figuræ erunt æquales, similes, &c. *In duabus sectionibus A B, & D E sumi debent figuræ G I, & H K, non qualescunque, sed illæ, quæ ad axes fiunt, nimirum debent esse G A, & H D axes inclinati, seu transuersi, & A I, atque D K eorum latera recta; tunc quidem, si figuræ axium G I, H K fuerint similes, & æquales, conicæ sectiones B A, D E æquales quoque ostenduntur in propositione. Quod verò particula illa (*axium*) desideretur in textu propositionis, constat ex primis verbis immediatè sequentis constructionis. Inquit enim.* Quoniam si ponamus axim A M super axim D O, &c. a

Cumque G I, H K sint duæ figuræ similes, & æquales, pariterque I P, K R; ergo duo plana A P, D R sunt æqualia, &c. *Quia rectangula I P, G I circa communem diametrum G I P consistunt, erunt inter se similia: pariterque K R simile erit rectangulo K H: quare duo rectangula I P, & K R similia sunt duobus rectangulis G I, H K inter se similibus; & ideo illa inter se quoque similia erunt, & habent latera homologa æqualia, illa nimirum, quæ opponuntur æqualibus abcissis A L, & D N, igitur rectangula P I, & R K* b

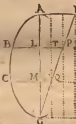
æqualia





æqualia sunt inter se: sunt verò rectangula N K, & L I æqualia quoque (cum latera circa angulos rectos æqualia habeant, singula singulis) ergo duo rectangula A P, & D R æqualia sunt inter se.

c Quia, si non cadit super illum, essent sectioni hyperbolicæ duo axes, & in ellipsi tres axes, &c. *Quoniam æquales sectiones B A, E D sibi mutuò congruunt, & vertices A, & D coincidunt, siquidem axis A L non cadit super axim D N (cum ambo tamen axes sint) haberet vnica sectio, scilicet duæ sectiones congruentes, duos axes A L, & D N conuenientes in eodem puncto verticis, quod in hyperbola est impossibile; in ellipsi verò, in qua semper duo axes reperiuntur se se secantes in centro ad angulos rectos, reperietur tertius axis, ille nimirum, qui ab eodem vertice A ducitur in eadem sectione A B, & non coincidit cum axi A L.* 48. lib. 2.



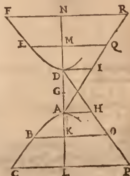


d Ideoque B L æqualis est N E, & poterunt A P, D R, applicata ad A L, D N æqualia &c. *Quia quadrata æqualium B L, E N æqualia sunt rectangulis A P, D R; erunt illa æqualia, & eorum latera A L, D N facta sunt æqualia; igitur reliqua duo latera L P, N R æqualia quoque sunt. Simili modo ostendetur, quod M Q æqualis est O S, seù L T æqualis est N V, & L M, seu T Q æqualis est N O, seu V S; erant autem prius L P, N R æquales; igitur residua P T, & R V æquales erunt, sed quia T Q, & G L sunt parallelæ pariterque V S, & H N; ergo vt T P ad P L ita est Q T ad L G, simili modo vt V R ad R N ita est S V ad N H; habent verò duæ æquales T P, & V R ad duas æquales P L, & R N eandem proportionem, igitur duæ æquales Q T, & S V eandem proportionem habent ad L G, & N H, & propterea hæ erunt æquales, & ablatis æqualibus A L, D N, erunt reliquæ A G, & D H inter se æquales, & habet G A ad A I eandem proportionē, quàm Q T ad T P, seu quàm S V ad V R; pariterq; H D ad D K est vt S V ad V R (propter parallelas & similitudinē triangulorū) igitur vt G A ad A I ita erit H D*

ad

ad D K, & propterea etiam consequentes A I, & D K æquales sunt inter se, & comprahendunt angulos rectos A, & D; ergo figura G A I, & H D K similes sunt inter se, & æquales.

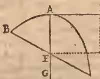
Notæ in Proposit. IV.

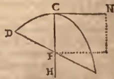


IAm ergo demonstratum est, quod duo vertices tympani sunt similes, & æquales, & inclinatus communis inter vtrumque verticem (16. ex 1.) ergo figura est communis, &c. *Hæc propositio est veluti Corollarium primæ partis secundæ propositionis in qua ostensum est, quod si duæ hyperbolæ habuerint axium figuras æquales, & similes, erunt quoque sectiones ipsæ æquales, & congruentes; habent verò sectiones oppositæ A B, & D E (quæ vocantur Vertices Tympani ab Arabico interprete) figuras D A H, & A D I axis D A æquales, & similes (vt in 14. primi libri demonstrauit Apollonius); ergo sectiones oppositæ æquales erunt inter se, & congruentes.* a

Notæ in Proposit. X.

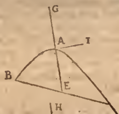
SImiliter constat, quod si potentes contineant cum suis abscissis angulos equales obliquos, iudicium est, quod memorauimus in sectionibus, &c. *Sensus huius propositionis talis est. In duabus sectionibus conicis, si cum earum diametris ordinatim applicatæ contineant angulos æquales, non rectos, & earum latera recta sint æqualia in parabolis, in reliquis verò sectionibus latera recta, & transuersa æqualia, itaut figuræ ipsæ æquales sint; erunt sectiones ipsæ inter se æquales: & è conuerso, si sectiones æquales fuerint, habebunt latera æqualia earum diametrorum, cum quibus ordinatim applicatæ angulos æquales, non rectos continent.* a

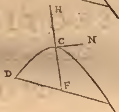




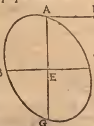
Demonstrationes non apponuntur ab Apollonio, quia ijsdem verbis omnino in eisdem figuris absolui possunt. Sint enim primo duæ parabolæ A B, & C D, atque earum diametri A G, & C H efficiant æquales angulos F, & E, cum ordinatim ductis D F, & B E, sintque latera recta A I, C N æqualia. Dico, sectiones

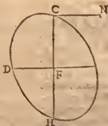
sectiones æquales esse. Sumatur quodlibet punctum B in sectione B A ducaturque ordinatim applicata B E, seceturque C F æqualis A E, & ducatur ordinatim D F. Manifestum est, rectangula E A I, & F C N æqualia esse (cum latera sint æqualia, singula singulis); his verò rectangulis æqualia sunt quadrata ordinatim applicatarum B E, D F; ergo & quadrata sunt æqualia, atque eorum latera B E, D F æqualia quoque. Si igitur parabolæ superponantur ita, vt punctum E super F, & diameter A E super C F cadat, necessariò punctum A super C cadet (propter æqualitatem abscissarum) atque punctum B super punctũ D incidet (propterea quod anguli E, & F æquales sunt, pariterque rectæ B E, & D F sunt æquales), & quia quodlibet punctum B parabolæ A B cadit semper super sectionem C D; ergo duæ sectiones B A, & D C sibi mutuò congruunt, & ideo æquales sunt. Non secus conuersum huius propositionis demonstrari potest. 11.lib. 1.





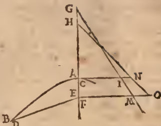
Altera verò pars propositionis breuius demonstrabitur hac ratione. In duabus hyperbolis, aut ellipsibus efficiant ordinatim applicatæ B E, D F cum diametris A E, & C F angulos æquales, & non rectos; sintque transuersa latera G A, & H C æqualia, pariterque latera recta A I, & C N æqualia. Dico, sectiones B A, C D æquales esse. Sumatur quodlibet punctum B sectionis B A, ducaturque ad A E diametrum ordinatim applicata B E, seceturque C F æqualis abscissa A E, ducaturque F D ad H C F diametrũ ordinatim applicata. Erit rectangulum G E A ad quadratum B E, vt latus transuersum G A ad rectum A I; pariterque rectangulum H F C ad quadratum F D erit, vt H C ad C N: habent verò duæ æquales G A, & H C eandem proportionem ad duas æquales A I, & C N; igitur rectangulum G E A ad quadratum B E eandem proportionem habebit, quàm rectangulum H F C ad quadratum D F, sunt verò rectangula G E A, H F C æqualia inter se (quandoquidem eorum latera A E, C F facta sunt æqualia) quæ addita ipsis A G, & C H æqualibus efficiunt latera E G, & F H æqualia; ergo quadrata duarum B E, & D F æqualia sunt inter se; & ideo ordinatim applicatæ B E, & D F æquales erunt. Quare facta, vt prius, intellectuali superpositione; nedum vertex A super C, sed etiam quodlibet punctum B sectionis A B super sectionem C D cadet; ideoque sectiones sibi mutuò congruent, & æquales erunt. 21.lib. 1.





E conuerso, si sectiones B A, & C D æquales supponantur, sibi mutuò congruent,

gruent, & ideo à communi vertice A, ducta qualibet diametro A E, vel C F, ad quàm ordinatim applicetur qualibet B E, seu D F in angulo non recto; sintque latera transuersa, & recta G A, A I, atque H C, C N. Dico, huiusmodi latera, & figurę seu rectãgula G A I, H C N æqualia, & similia esse inter se, & sibi mutuò congruentia. Si enim hoc verum non est, eorum diametri G I, & H N similiter posita, & subtendentes communem angulum A non coincident; & ideo æquidistantes erunt aut se mutuò secabunt in vno puncto: ducatur ergo à termino E alicuius ordinatim applicatæ B E recta linea E M parallela lateribus rectis A I, C N, ita vt secet diametros figurarum supra aut infra occursum in duobus punctis M, & O. Igitur in sectione A B idem quadratum ordinatim applicatæ B E, seu D F æquale erit rectangulo A E M, & in sectione D C æquale erit rectangulo C F O, suntque abscissæ A E, & C F æquales; ergo M E, & O F æquales inter se sunt: pars, & totum quod est absurdum: Non ergo latera figurarum inæqualia sunt. Quod erat ostendendum.



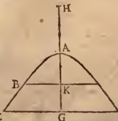
SECTIO SECVNDA.

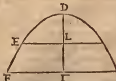
Continens Proposit. III. VI. VII. & IX.

PROPOSITIO III.

Conisectio non est æqualis sectioni quæ eiusdem generis cũ illa non sit. a

Etenim ellipsis non erit æqualis alicui parabolæ, aut hyperbolæ; quia illa est terminata, hæ verò sunt indeterminatæ. At parabola D E F, cuius axis D I non erit æqualis hyperbolæ A B C, cuius axis A G, & inclinatus A H. Quia si abscindantur A K, K G æquales D L, L I, & educamus ad axes perpendiculares B K, C G, E L, F I: Dico, quod sectio D F non est æqualis sectioni



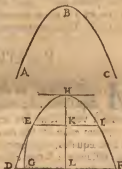


ſectioni A C; quia ſi eſſet æqualis *illi*, facta ſuperpoſitione, ſibi mutuò congruerent, & caderent puncta E, F, L, I, ſuper B, C, G, K, & eſſet F I æqualis C G, atque E L æqualis B K; ideoque quadratũ F I ad quadratum E L eſſet, vt D I ad D L (19. ex 1.) eſſetque quadratum C G ad quadratum K B, vt A G ad K A, quod eſt abſurdum; quia illius proportio ad iſtam eſt, vt H G in G A ad H K in K A (20. ex 1.) Igitur ſectio parabolica non eſt æqualis ſectioni hyperbolæ, nec ſectio aliqua æqualis eſt ſectioni, quæ non ſit eiuſdem generis; Et hoc erat oſtendendum. 20.lib. 1. 21.lib. 1.

PROPOSITIO VI.

a QVælibet duæ ſectiones A B C, & D H F, quarum portio vnius ſuperpoſita portioni alterius congruit, ſunt æquales inter ſe.

Alioquin congruat portio B C portioni E F, at non cadat portio A B ſuper D E, ſed cadat in ſitu E G, & educamus lineam tangentem duas ſectiones in H, & educamus E I, D G F parallelas tangenti; & ex H ad ſemipartitionem ipſius E I ducatur H K, quæ occurrat D F in L. Et quia H L ſecat bifariam lineam parallelam tangenti ab eius termino ductæ; ergo eſt diameter vniuerſæ ſectionis (5. ex 2.) quare bifariam ſecat vnamquanque ex D F, G F, & fiet D L æqualis G L, quod eſt abſurdum: igitur ſectio A B C tota congruit ſectioni D H F. Quod erat oſtendendum. 34.lib. 1. 7.lib. 2.

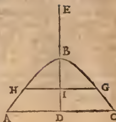


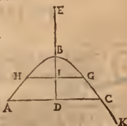
PROPOSITIO VII.

a DVæ ordinationes axis in qualibet coni ſectione abſcindunt à ſectione ex vtraque parte axis duas portiones; quarum ſi vna alteri ſuperponatur ſibi mutuò congruent, nec congruunt alicui aliæ portioni ſectionis.

Sit conisectio A B C, & eius axis B D, & sumantur in sectione puncta G, C, ab eis educãtur duæ ordinationes G H, C A occurrentes axi in I, D. Dico, quod B G congruit B H, & G C ipsi H A, & superficies B D C superficiei B D A, & segmentum B G C segmento B H A. Quoniam axis B D bifariam diuidit G H, A C in I, D, vtique G I ipsi I H congruet, & D C ipsi D A, & duo puncta G, C super duobus punctis H, A cadent, & portio sectionis conicæ G C super portionem H A, & G B super H B: Et dico, quod portio H A non congruit alicui alteri portioni, quàm G C: si enim possibile est cõgruat portioni C K, & portio H B congruet portioni, quæ continuatur ipsi K C; ergo cadet B ex H B non super B ex C G B; quia portio H B non est æqualis portioni C B; & propterea incidet axis B D in alium locum, essentque eidem sectioni plures axes: quod est absurdum; (51. 52. ex 2.) igitur non cadit H A nisi super C G. Vt fuerat propositum.

48.lib. 2.





b

PROPOSITIO IX.

Manifestum est ex demostratis, quod portiones sectionum æqualium non congruunt sibi inuicem, nisi earum distantiæ à verticibus sint æquales. a

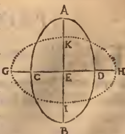
Ostensum enim est sibi non congruere, quarum distantiæ à verticibus non sunt æquales, quia portio H A, si caderet super portionem C K, & earum distantiæ à B non essent æquales, consequitur, quod in hyperbola sint duo axes, & in ellipsi tres axes: quod est absurdum (51. 52. 53. ex 2.)

48.lib. 2.

Si autem in ellipsi cadit axis A E transuersus super axim rectum illius, vtique differunt inter se, & non sibi inuicem congruunt sectiones. b

Constat etiam, quod in sectionibus inæqualibus, vt A B C, D E F portio vnius earum non congruit portioni alterius.

Alioqui congruet B A ipsi D E, & congrueret etiam E F ipsi B C (6. ex 6.) essetque sectio C B A æqualis sectioni F E D; at supposuimus, non esse æquales, quod est absurdum:



Ergo

ergo non congruit portio alicuius sectionis portioni alterius sectionis, cui æqualis non est. Et hoc erat ostendendum.

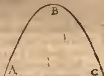


Notæ in Proposit. III.

a ETenim ellipsis non est æqualis alicui hyperbolæ, &c. *Suppleri debet in textu verbum* (parabolæ) *dicendo. Etenim ellipsis non est æqualis alicui parabolæ, aut hyperbolæ, quia illa est determinata; hæ verò sunt indeterminatæ, scilicet ellipsis est finita parabole verò, & hyperbole in infinitum extendi possunt, & propterea nulla ratione æquales ostenduntur.*

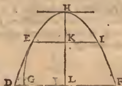
Notæ in Proposit. VI.

a QVælibet duæ sectiones A B C, D E F, quarum vnaquæque literarum superposita literis alterius congruit; vtique sunt æquales, &c. *Legendum puto. Qualibet duæ sectiones A B C, & D E F, quarum portio vnius, alterius portioni superposita congruit sunt æquales inter se.*



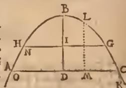
Notæ in Proposit. VII.

a ORdinationes axis in qualibet hyperbolarum abscindunt à sectione ex vtraque parte axis duo segmenta, quæ, si cadit vnum super alterum, sibi mutuò congruunt, nec excedunt, nec deficiunt, nec congruunt alicui portioni sectionis, &c. *Expungi debent verba aliqua huius textus superuacanea, & aliqua adiungi, vt sensus continuus talis sit. Duæ ordinationes axis in qualibet conisectione abscindunt à sectione ex vtraque parte, axis duas portiones, quarum vna alteri superposita sibi mutuò congruent, nec cögruunt alicui alia portioni sectionis.*



b Quoniam axis B D bifariam diuidit G H, A C, &c. *Ex eo enim quod omnes applicatæ ad axim B D secantur bifariam ab illo,*

illo, & ad angulos rectos, si intelligatur superficies B I G, superposita superficiei B I H, stante axis super axim eadē, atque vertex B sit communis necessario punctum I commune erit, atque recta I G cadet super I H, cum anguli G I B, & H I B recti sint, atque punctum G cadet in H, propter æqualitatem duarum ordinatim applicatarum I G, I H: eadem ratione quælibet alia puncta sectionis G B inter G, & B sumpta cadent super B H; & ideo portio sectionis conicæ G B congruet portioni B H, & eidem æqualis erit. Simili modo constat, portionem G C æqualem esse portioni H A, & sic superficies ipsa. Quod verò portio H A non congruat alicui alteri segmento C K præter G C, constat ex eo, quod si portiones K C, & A H sibi mutuò congruunt, vt nimirum punctum C super H, & punctum K super A cadat: & concipiatur punctū C idem ac N, & K idem ac O, & portio O N L æqualis immo eadem sectio K C B, & illius axis L M omnino idem ac axis B D: tunc quidem (ex præcedenti prop. 6.) sectiones ipsæ A B, & K B, seu O L æquales erunt, & sibi mutuò congruentes: & propterea H B cadet super portionem maiorem C B seu ei æqualem N B L (cum H B æqualis ostensa sit ipsi G B) & ideo vertices B, & L duarum axium B D, & L M in duabus sectionibus A B, & K B seu O N L inæqualibus non conuenient: quapropter in duabus congruentibus, seu in eadem sectione duo axes B D, & L M existent, quod est absurdum, quia est contra propos. 48. libri 2.



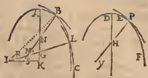
Notæ in Proposit. IX.

Manifestum est ex demonstratis, quod portiones sectionum æqualium non congruunt, &c. *Sicuti in propos. 7. dictum est, quod duæ portiones non æqualiter à vertice axis distantes sibi mutuò congruere nō possunt, ita hic in duabus quibuslibet æqualibus conisectionibus idem verificari ostenditur, quod nimirum duæ portiones cuiuslibet sectionis conicæ, vel duarum æqualium sectionum inæqualiter à vertice axis distantes non sint congruentes. Hoc autem alia ratione demonstrare superuacaneum non erit, cum demonstratio, quæ in textu Arabico corrupto affertur non omnino sufficiens videatur, sed prius ostendendum est.* a

LEMMA I.

IN duabus æqualibus conisectionibus A B C, & D E F, quarum axes A G, D H describere duos circulos æquales contingentes conicas sectiones, quorum is, qui propinquior est vertici extrinsecus, reliquus verò intrinsecus sectionem tangat.

In

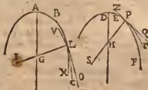


In sectione A B C ducatur ramus breuisecans singularis I L secans axem in G, sitque I punctum concursus perpendicularis I K, & breuisecantis; & à quolibet puncto B inter L, & verticem A ducatur alius ramus breuisecans B M, qui occurret L I vltra axim in M, & inter puncta G, & I; coniungaturque recta linea B I. Quoniam angulus L G A acutus est, erit angulus G M N internus, & oppositus in triangulo G M N minor illo, & ideo acutus, & propterea qui deinceps est angulus B M I erit obtusus, & ideo in triangulo I B M latus I B subtendens maximum angulum obtusum maius erit latere B M; sed ramus I L maior est, quàm I B, propterea quod remotior est à vertice A, igitur ramus I L maior erit, quàm B M: Secari ergo poterunt æquales rectæ lineæ L R, B S, quæ sint minores quidē, quàm I L, sed maiores, quàm M B; & describantur duo circuli, quorum radij sint S B, & R L æquales, atque centra sint S, & R; Manifestum est circulum, cuius radius B S contingere conisectionem A C in puncto B, & extrinsecùs incedere, propterea quod radius B S maior est maximo breuisecantium M B à concursu M educto; è contra circulus radio R L descriptus intrinsecùs continget eandem conisectionem in L cum ramus M L minor sit singulari breuisecante L I. Tandē in sectione D E F secetur axis abscissa D H æqualis A N, & in angulo D H P æquali angulo A N B ducatur radius Y H P, qui fiat æqualis S B, & cētro Y radio verò Y P circulus describatur. Et quia in sectionibus æqualibus abscissæ, breuisecantes, anguli ab eis contenti, & circuli descripti sunt æquales, & congruentes; igitur circulus radio Y P descriptus, contingit conisectionem D E F extrinsecùs; sicuti circulus radij S B tangebat sectionem A B C in B extrinsecùs. Vt erat propositum.

51. 52. 53. lib. 5. — 28. lib. 5. — 8. Addit. lib. 5. — 13. 14. 15. lib. 5. — 67. lib. 5. — Ex 12. Addit. lib. 5. — 8. Addit. lib. 5. — Ibidem.

Hoc demonstrat o ostendetur, quod in duabus conisectionibus A B C, D E F æqualibus, quarum axes A G, D H duæ portiones B C, & E F non æquè ab axium verticibus remotæ non erunt sibi congruentes. PROP. 1. Addit.

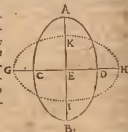
Si enim possibile est B C, & E F sibi mutuò congruant, & sumatur intermedium punctum commune, vel duo puncta coincidentia L, & P, & quia portiones B C, E F inæqualiter distant à verticibus, ergo puncta coincidentia L, P non erunt æquè à verticibus remota; sit ergo P propinquius vertici D, quàm est L vertici A, & per L, & P ducantur rectæ lineæ L O, P Q tangentes sectiones, & ex lēmate præcedenti describantur duo circuli æquales Z P T, & V L X radijs I L & S P; quorum Z T extrinsecus tangat sectionē in P, & V X intrinsecus in L, cumque eorum radij I L, S P sint breuisecantes, erunt perpendiculares ad L O, P Q contingentes sectionem in L, & P; atque portiones B C, E F sibi mutuò congruunt, idest constituunt vnicam communem peripheriam, ergo rectæ lineæ L O, P Q contingentes eandem sectionem sibi mutuò congruent, pariterque breuisecantes æquales L I, P M ad illas perpendiculariter insistentes erunt congruentes quoque; & propterea circuli V X, Z T ab ijs radijs geniti erunt quoque congruentes,



33. 34. lib. 1. — 29. 30. lib. 5. — 35. 36. lib. 1.

entes; ideoque si vnus eorum, nempe Z T extrinsecùs tangit communem portionem conicam B C, reliquus V X extrinsecùs quoque eam tanget, sed ex constructione intrinsecùs sectionem tangebat, quod est absurdum: Non ergo duæ portiones B C, & E F non æquè à verticibus axium remota sibi mutuo congruent. Quod erat ostendendum.

Si autem cadit in ellipsi axis A C transuersus super axim rectum illius; vtique excedit illam, & non sibi mutuò congruunt sectiones, & quædam congruunt, &c. *Sensus est. Si intelligantur duæ ellipses, habentes axes transuersos A B, & G H æquales inter se, pariterque axes rectos C D, I K æquales: & axis A B transuersus vnius ponatur super I K axim rectum alterius, ita vt centra sibi mutuò congruant in E: tunc quidem, quia axes in ellipsi inæquales sunt (alias esset circulus) igitur extremitates axis transuersi A B non cadunt super extremitates axis recti K I, neque G, H cadunt super C, D; & ideo circumferentia ellipsium se se mutuò secant quatuor in locis, vt in libro 4. ostensum est.* b



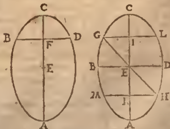
SECTIO TERTIA

Continens Proposit. V. & VIII.

PROPOSITIO V.

SI per centrum E ellipsis A B, C D transeat linea recta A C vsque ad sectionem; vtique bifariam diuidit superficiem sectionis, & circumferentiam illius, scilicet erit superficies A B C æqualis superficiei A D C.

Nam si A C fuerit axis sectionis, vtique circumferentia A B C congruet A D C, nam si non cógruit signemus locum B, quod alteri sectioni nó coincidat, & producamus ex illo perpendicularem B F super A C vsque ad D. Ergo B D ordinata est ad C A, & propterea B F superposita cógruet ipsi D F, & cadet B super D, quia B F æqualis est D F (8. ex 1.); sed non cadebat super illum; quod est absurdum. Igitur circumferentia



rentia A B C æqualis eſt circumferentiæ A D C, & ſuperficies illius æqualis ſuperficiei.

Iam linea G H tranſiens per centrum ellipſis non ſit axis. Ducamus ex G, H ſuper axim C A duas perpendiculares G I, H K, quæ pertingant ad L, M. Et quia ſi ponatur A D C ſuper A B C, congruit G I ſuper L I (7. ex 6.) & cadet G ſuper L, quia G I æqualis eſt I L, & cadit circumferentia C G ſuper circumferentiam C L; ergo ſuperficies C I G æqualis eſt ſuperficiei C I L: & quia B C D congruit B A D, & ſuperficies ſuperficiei, cadet C I ſuper A K, & L I ſuper K H, & circumferentia C L ſuper circumferentiam A H (quia E I æqualis eſt E K) & ſuperficies C I L congruit ſuperficiei A K H; & propterea ſuperficies A K H æqualis eſt G I C, & triangulum E G I æquale eſt triangulo E K H; igitur ſuperficies A E H æqualis eſt ſuperficiei G E C, & circumferentia A H æqualis eſt circumferentiæ G C, eritque circumferentia C D H, & ſuperficies eius æqualis A B G, & ſuperficiei illius. Quare G H tranſiens per centrum ſectionis A B C D bifariam eam diuidit. Et hoc erat oſtendendum.

PROPOSITIO VIII.

Similiter conſtat, quod ſi ex quolibet quadrante ellipſis ſecentur circumferentiæ, per quarum extremitates rectæ lineæ coniunctæ ſint ad eundem axim ordinatim applicatæ, & æquè à centro remotæ; vtique ſunt congruentes, & æquales, nec alicui portioni eiuſdem ſectionis vna illarum æqualis eſt.



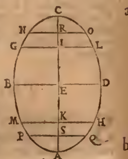
a Nam demonſtrauimus, quod duæ ſuperficies G I C, L I C ſibi congruunt, nec non congruunt, duabus ſuperficiebus H A K, M A K (5. ex 6.); & ſi eduxerimus duas ordinationes N O, P Q, quarum diſtantiæ à centro ſint æquales, ſimili modo oſtendetur, quod ſuperficies N R C, O R C, A S Q, A S P ſint congruentes (5. ex 6.) & quod circumferentiæ N C, C O, A Q, A P ſint congruentes, remanebunt quatuor ſegmenta G N, L O, H Q, M P congruentia, & ſuperficies quoque eorum congru-
b entes. Et inſuper dico, quod quodlibet horum ſegmentorum non congruit alicui alio ſegmento; nam ſequeretur, quod in eadem ellipſi ſint tres axes, vti dictum eſt. Quare patet propoſitum. 48. lib. 2.

Notæ in Propofit. V.

ATque B C D congruit B A D, & fuperficies fuperficiei, &c. *Quoniam in fecunda figura B D eft axis ellipfis per centrum E ductus; ergò vt in prima parte huius propofitionis dictum eft, fibi mutuò congruent femiellipfes B C D, & B A D.* a

Notæ in Propofit. VIII.

NAm demonftrauimus, &c. *Expofitio huius propofitionis hac erit. Sit ellipfis A B C D, cuius axes C A, & B D, & in quolibet eius quadrante fignentur tales circumferentiæ N G, O L, H Q, M P, vt coniuncta recta linea O N, G L, H M, Q P fint ad axim A C ordinatim applicatæ fecantes eum in R, I, K, S; fintque binarum extremarum N O, P Q à centro E diftantia æquales E R, E S, & binarum intermediarum L G, H M æquales à centro diftantia E I, E K oftendendum eft fegmenta G N, L O, H Q, M P æqualia effe.* a



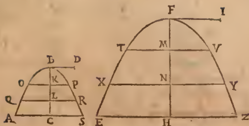
Et infuper dico, quod quodlibet horum fegmentorum non congruet alicui alio fegmento, &c. *Si enim in eodem, vel in duabus ellipfis quadrantibus fumantur fegmenta G N, & M P non æque ab axis vertice B vel à verticibus A, C eiufdem axis remota, non erunt congruentia, vt deducitur ex propof. 1. additarum huius.* b

SECTIO QVARTA

Continens Propofit. XI. XII. XIII. & XIV.

PROPOSITIO XI.

QVælibet fectio parabolica, vt A B, cuius axis B C, & erectum B D fimilis eft cuilibet fectioni parabolicæ, vt E F, cuius axis F H, & erectum F I.



Ponamus itaque C B ad B D, vt H F ad F I, & diuidantur tam B C, quàm F H in punctis K, L, M, N in eisdem rationibus, & educamus super eas ordinationes O P, Q R, A S, T V, X Y, E Z. Quia B C ad B D est vt H F ad F I, & A C est media proportionalis inter C B, B D (12. ex 1.) pariterque E H inter H F, F I (12. ex 1.) igitur A C ad C B est, vt E H ad H F, & A S dupla ipsius A C ad C B est, vt E Z ad H F; cumque B C ad B L posita sit, vt H F ad F N, erit B D ad B L, vt I F ad F N; igitur Q R ad L B est vt X Y ad N F; atque sic ostendetur, quod O P ad K B est, vt T V ad M F, quare proportio ordinationum axis vnius sectionum ad sua abscissa est, vt proportio ordinationum alterius ad sua abscissa, & proportiones abscissarum vnius sectionis ad abscissa alterius sectionis eædem sunt. Quare sectio A B similis est sectioni E F. Quod erat ostendendum.

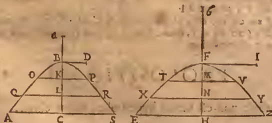
Ex 11. lib. 1.

a

Defin. 2. huius.

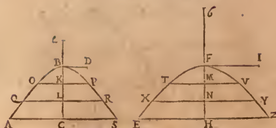
PROPOSITIO XII.

SI duarum hyperbolarum, aut ellipsium duæ axium figuræ fuerint similes, vtique sectiones similes erunt: Si verò fuerint sectiones similes, figuræ etiam similes erunt.



a Sint sectiones A B, E F, earum axes inclinati, vel transuersi B a, F b,

b & erecti earum B D, F I, & maneant signa, ordinationes, & proportiones eædem, quæ in præcedenti propositione. Quoniam figura sectionis

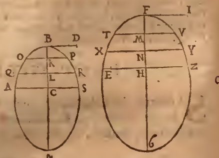


A B ſimilis eſt figuræ ſectionis E F, erit quadratum H E ad H *b* in H F, vt quadratum A C ad C *a* in C B; & *b* H in H F ad quadratum H F, vt *a* C in C B ad quadratum C B (nam poſuimus H F ad F *b*, vt C B ad B *a*) ergo ex æqualitate, quadratũ E H ad quadratũ H F eſt, vt quadratum A C ad quadratum C B: & propterea E Z ad H F eſt vt A S ad C B; Atque ſic oſtendetur, quod X Y ad N F ſit vt Q R ad L B, & T V ad M F ſit vt O P ad K B; ergo proportiones ordinationum axis vnius earum ad ſua abſciſſa ſunt eædem rationibus aliarum ordinationum axis

Defin. 2. huius. ad ſua abſciſſa, & alternatiuè. Quare duæ ſectiones ſunt ſimiles.

E contra oſtendetur, quod ſi duæ ſectiones fuerint ſimiles, earũ figuræ ſimiles quoque erunt.

Ex def. 2. huius. Quia eſt A C ad C B, vt E H ad H F, & eandem proportionem habent earum quadrata, atque quadratum H F ad H F in H *b* eſt, vt quadratum C B ad C B in C *a* (eo quod H F ad F *b* poſita fuit, vt C B ad B *a*); ergo ex æqualitate quadratum E H ad *b* H in H F, nempe I F



21.lib. 1. ad F *b* (20. ex 1.) eſt, vt quadratum A C ad *a* C in C B, nempe vt

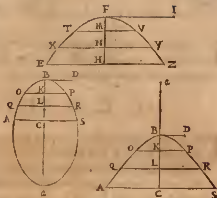
Ibidem. D B ad B *a* (20. ex 1.); quare figuræ duarum ſectionum ſunt ſimiles. Et hoc erat oſtendendum.

PROPOSITIO XIII.

Parabola non eſt ſimilis hyperbolæ, neque ellipſi.

Hyperbolæ, ſeu ellipſis A B ſit axis B C, & inclinatus, ſeu tranſuerſus B *a*, & E F ſit ſectio parabolæ, cuius axis F H. Dico, quod ſectio E F non eſt ſimilis ſectioni A B hyperbolicæ, aut ellipticæ, alioquin ſit ſimilis ali- a

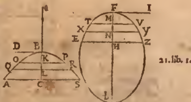
b lis alicui earum (si possibile est) ergo possumus educere in singulis sectionibus potentes, quæ habeant ad sua abscissa axium easdẽ proportiones, & abscissæ inter se sint proportionales; sintque illæ V M, Y N, P K, R L. Quia Y N ad N F posita fuit, vt R L ad L B, & N F ad F M, vt L B ad B K, & F M ad M V, vt B K ad K P; ergo Y N ad M V in potentia, nempe N F ad M F (cum sectio sit parabola 19. ex 1.) nempe L B ad B K ex contructione erit, vt R L ad K P potentia, quæ eandem proportionem habent, quàm *a* L in L B ad *a* K in K B; quia sectio est hyperbolæ, aut ellipsis (20. ex 1.) quare *a* L in L B ad *a* K in K B est, vt L B ad B K; quare *a* L est æqualis *a* K: quod est absurdum. Igitur parabole non est similis vlli reliquarum sectionum. Et hoc erat probandum. 20.lib. 1. 21.lib. 1.



PROPOSITIO XIV.

ET sic ostendetur, quod hyperbolæ non est similis ellipsi.

a Alioquin sequitur, quod quadratum R L ad quadratum K P, nempe *a* L in L B ad *a* K in K B in hyperbola est, vt quadratum Y N ad quadratum M V, seu vt *b* N in N F ad *b* M in M F in ellipsi. His positis: quia L B ad B K posita fuit, vt N F ad M F; ergo *a* L ad *a* K eandem proportionem habet, quàm *b* N ad *b* M: & hoc est absurdum. Quare sectio A B non est similis E F; vt fuerat propositum. 21.lib. 1.



MONITVM.

IN principio huius libri monuimus, definitionem similium conicarum sectionum, quæ circunfertur, vitiosam esse; quod hic ostendendum suscepimus: sed prius hæc demonstranda sunt.

LEMMA II.

IN duabus conisectionibus A B, E F eiusdem nominis sint axium figuræ G B D, K F I similes inter se, idest transuersa latera G B, K F proportionalia sint lateribus rectis B D, F I: duci debent in singulis sectionibus series applicatarum ad axes, ita vt axium abscissæ (quæ proportionales sunt inter se) ad conterminas potentiales non sint in iisdem rationibus.

Sumantur duæ abscissæ B C, F H, quarum C B ad B D habeat maiorem proportionem, quàm habet H F ad F I, & C B, H F secentur proportionaliter in R, V, & per ea puncta ducantur ad axes ordinatim applicatæ A C, E H, Q R, T V. Quoniam quadratum A C ad rectangulum G C B eandem proportionem habet, quàm latus rectum D B ad transuersum G B, pariterq; quadratum E H ad rectangulum K H F est vt I F ad F K; atq; D B ad B G ex hypothesi, est vt I F ad F K; ergo quadratum A C ad rectangulum G C B eandem proportionem habet quàm quadratum E H ad rectangulum K H F: & quia G B ad B D est vt K F ad F I, & D B ad B C minorem proportionẽ habet quàm I F ad F H, ergo ex æquali G B ad B C, minorem proportionem habet quàm K F ad F H, & componendo in hyperbola, & diuidendo in ellipsi G C ad C B seu rectangulum G C B ad quadratum B C minorem proportionẽ habebit quàm K H ad H F, seu quàm rectangulum K H F ad quadratum F H: erat autem quadratum A C ad rectangulum G C B vt quadratum E H ad rectangulum K H F; igitur ex æquali, quadratum A C, ad quadratum C B minorem proportionem habet quàm quadratum E H ad quadratum H F, & ideo A C ad C B 21. lib. 5.

minorem

minorem proportionem habebit, quàm E H ad H F. Postea quia C B ad B R erat vt H F ad F V, & prius G B ad B C minorē proportionem habebat, quàm K F ad F H, ergo ex æquali G B ad B R minorem proportionem habet, quàm K F ad F V, & componendo in hyperbola, & diuidendo in ellipsi G R ad R B, seu rectangulum G R B ad quadratum B R minorem proportionem habet, quàm K V ad V F, seu rectangulum K V F ad quadratum V F; sed propter similitudinem figurarum, vt prius quadratum Q R ad rectangulum G R B est vt quadratū T V ad rectangulum K V F; ergo ex æquali quadratum Q R ad quadratum R B minorem proportionem habet, quàm quadratum T V ad quadratum V F, & Q R ad R B minorem proportionem habebit, quàm T V ad V F. Et sic reliquæ omnes abscissa: quapropter patet propositum.

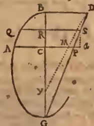
COROLLARIVM.

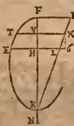
HInc constat in duabus similibus conisectionibus duci posse duas series applicatarum ad axes, itaut abscissæ axium, quæ inter se proportionales sunt, ad suas potentiales nonsint in ijsdem rationibus. Quandoquidē ex prima parte propositionis 12. quotiescunque axium figuræ similes sunt etiam sectiones ipsæ sunt similes.

L E M M A III.

IN ijsdem figuris habeat G B ad B D maiorem proportionem, quàm K F ad F I duci debent duæ ordinatim ad axes applicatæ, quæ ad conterminas abscissas eandem proportionem habeant.

Ducatur qualibet ordinata E H, producanturq; vt secet coniunctam K I in L, & vt D B ad B G ita fiat L H ad H N, atq; fiat G C ad B C, vt N H ad H F, ducaturque ordinata A C; quæ producta secet coniunctam G D in P. Dico A C, & E H esse quæsitas. Quoniam quadratum A C ad rectangulum G C B eandem proportionem habet, quàm D B ad B G, seu L H ad H N, & rectāgulum G C B ad quadratum B C est vt G C ad C B, seu vt N H ad H F, ergo ex æqualitate quadratum A C ad quadratum C B est vt L H ad H F, seu vt rectangulum L H F ad quadratum H F; vel potius vt quadratum E H ad quadratum H F; ideoque A C ad C B erit vt E H ad H F. Quod erat propositum. 21.lib. 1.





12. 13. lib. 1.

LEMMA IV.

LEMMA IV.

SI G B ad B D maiorem proportionem habuerit, quàm K F ad F I: Dico in singulis sectionibus reperiri non posse binas axium abscissas inter se proportionales, quæ ad conterminas potentiales sint in eisdem rationibus.

Si enim fieri potest, sit A C ad C B, vt E H ad H F, & Q R ad R B sit, vt T V ad V F, atque C B ad B R sit vt H F ad F V; coniungantur rectæ G D, K I quæ secent ordinatas in S, P, X, L; & secentur C a æqualis R S, & H b æqualis V X, suntq; æquidistantes; ergo coniungentes S a, R C æquales sunt, & parallelæ, & sic etiam coniungentes X b, & V H, quare quadratum A C, seu rectangulum P C B ad qua-
12. 13. lib. 1. *dratum C B eandem proportionem habet, quàm quadratum E H, seu rectangulum L H F ad quadratum H F; ideoque P C ad C B eandem proportionem habet, quàm L H ad H F; est verò C B ad B R, vt H F ad F V, & per conuersionem rationis C B ad C R est vt H F ad H V, ergo ex æquali C P ad C R est vt L H ad H V: Eodem modo ostendetur, quod S R, seu a C ad R C est, vt X V, seu b H ad V H; erat autem P C ad C R vt L H ad H V; ergo a P differentia ipsarum S R, P C ad G R, seu ad S a est vt b L differentia ipsarum X V, L H ad H V, seu ad X b; estque D B ad B G vt P a ad S a (propter parallelas a S, C G, & parallelas a P, & B D) pariterque I F ad F K est vt L b ad b X, ergo D B ad B G eandem proportionem habet, quàm I F ad F K; quod est contra hypothesim, non ergo binæ axium abscissæ inter se proportionales reperiri possunt in sectionibus A B, & E F, quæ ad conterminas potentiales sint in eisdem rationibus; quod erat ostendendum.*

COROLLARIVM.

HInc constat in duabus sectionibus eiusdem nominis si axium figuræ G B D, & K F I non fuerint similes, neque sectiones A B, & E F similes esse. Nam est impossibile, vt omnes, idest infinitæ axium abscissæ inter se proportionales ad conterminas potentiales sint in eisdem rationibus, cum neque binæ in singulis reperiri possint ex hac propositione.

LEMMA V.

LEMMA V.

IN eisdem figuris rursus G B ad B D maiorem proportionem habeat, quàm K F ad F I: Dico quod minimè reperiri possunt axium abscissæ erectis proportionales, quæ habeant eandem rationem ad contermina potentiales.

Secentur qualibet abscissæ, B C, F H ita vt C B ad B D sit vt H F ad F I, & ducantur ordinatim ad axes applicatæ A C, E H, quæ productæ secent, coniunctas G D, K I in P, L, atque fiat Y B ad B D vt K F ad F I, iungaturque Y D secans A P in M. Manifestum est rectam C M inæqualem esse C P, (propterea quod Y B minor est, quàm G B, cum ad eandem B D minorem proportionem habeat, quàm G B, ideoque punctum Y, & recta Y D cadent intra triangulum G B D, & punctum M intra ipsum cadet, aut extra G D productam). Quoniam D B ad B Y est vt I F ad F K, & erat C B ad B D vt H F ad F I; ergo ex æquali C B ad B Y erit vt H F ad F K, & comparando terminorum summas in hyperbola, & differentias in ellipsi ad antecedentes, Y C ad C B erit vt K H ad H F; est verò M C ad C Y vt L H ad H K (eo quod triãgula M C Y, & L H K similia sunt triangulis similibus B D Y, I F K,) ergo ex æquali M C ad C B erit vt L H ad H F, & rectangulum M C B ad quadratum C B eandem proportionem habebit, quàm rectangulum L H F ad quadratũ H F; sed rectangulũ M C B æquale nõ est rectangulo P C B (cum M C ostensa sit inæqualis P C); ergo rectangulum P C B, seu quadratum A C ad quadratum C B non eandem proportionem habet, quàm rectangulum L H F, seu quadratum E H ad quadratum H F; & propterea A C ad C B non eandem proportionem habebit quàm E H ad H F. Idem ostendetur in reliquis omnibus abscissis similiter positis. Quare patet propositum. 12. 13. lib. 1.

COROLLARIVM I.

MAnifestum est in conisectionibus non similibus duci posse duas series applicatarum ad axes, ita vt abscissæ similes, seu proportionales inter se ad cõterminas potentiales non sint in ijsdem rationibus.

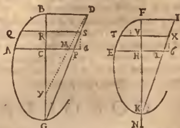
COROLLARIVM II.

COlligitur pariter conuertendo, quod in duabus sectionibus eiusdem nominis si duæ series abscissarum similium in axibus posita fuerint, & in vna serie abscissæ ad conterminas potentiales maiorem proportionem habeant, quàm in altera serie, fieri potest vt figura axium non sint inter se similes: Quod verificatur saltem in casu præcedentis propositionis.

His præmissis, quoniam passio in definitione posita essentialiter conuenit definito est impossibile, vt eidem subiecto definito competant duæ passiones diuersæ, & inter se oppositæ, exempli gratia, fieri non potest, vt in triangulis similibus ali-

quando anguli vnius inæquales sint angulis alterius, aut aliquando latera circa angulos æquales non sint proportionalia; ità in definitione Mydorgiana, quia conisectiones dicuntur similes in quibus omnes axium abscissæ, quæ proportionales sunt inter se in ijsdem sunt rationibus ad conterminas potentiales, igitur eidem subiecto definito, idest in duabus sectionibus conicis similibus, est impossibile, vt reperiatur series aliqua infinitarum similium abscissarum in axibus, quæ ad conterminas potentiales non sint in ijsdem rationibus, & siquidem duæ passiones oppositæ eidem subiecto definito conueniant nulla earum erit eius passio essentialis, & ideo definitio bona non erit: vt exempli gratia quia in duobus similibus circulorum segmentis duo triangula inscripta possunt esse æquiangula, & etiam non æquiangula; ergo similitudo inscriptorum triangulorum non est passio essentialis segmentorum circularium similium inter se, & ideo non erit hæc bona definitio: Similia circulorũ segmenta sunt in quibus describi possunt duo triangula similia, *& ratio est, quia per definitionem nedum natura rei declaratur, & indicatur, sed etiam distinguitur, & diuersificatur à qualibet alia; & quoniam in sectionibus similibus reperiuntur duæ series similium abscissarum, quæ ad conterminas potentiales non sunt in ijsdem rationibus; & è contra ex definitione Mydorgij duæ series similium abscissarum, quæ ad conterminas potentiales sunt in ijsdem rationibus, essentialiter conueniunt definito; igitur hæ duæ oppositæ passiones conueniunt eidem subiecto definito, scilicet sectionibus similibus iuxta Mydorgij sententiam: quapropter tradita definitio sectionum similium vitiosa erit, & manca.*

Coroll. Lem. 2. huius.



Vt autem hoc clarius pateat exponantur duæ sectiones A B, E F eiusdem nominis, quarum axes B C, F H, & propositum primò sit demonstrare sectiones illas esse similes inter se; ergo ostendendum est passionem definitionis traditæ conuenire sectionibus A B, E F; quod nimirum similes axium abscissæ in ijsdem rationibus debent esse adcõterminas potentiales, & quia in definitione nulla cautio, vel determinatio adhibetur, igitur sumi possunt quælibet axium abscissæ B C, F H, & hæ secari proportionaliter in R, V; & à punctis diuisionum duci possunt ad axes ordinatim applicatæ A C, E H, Q R, T V; & supponamus demonstratum esse, quod B C ad C A sit vt F H ad H E, pariterque vt B R ad R Q sit vt F V ad V T, tunc quidem ex vi definitionis deducitur, quod similes sint sectiones A B, & E F. At quia demonstrari potest in ijsdem sectionibus (sumendo abscissas B C, F H ad libitum, & proportionaliter diuidendo eas in R, & V) quod B C ad C A habet maiorem proportionem, quàm F H ad H E; pariterque B R ad R Q maiorem proportionẽ habeat, quàm F V ad V T, & sic semper; ergo non poterit deduci similitudo potius quàm non similitudo; ideoque definitio similium sectionum erit vitiosa, quandoquidem ex ea duæ contradictoria deducuntur.

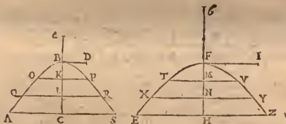
ex Lem. 2. huius. Coroll. 2. Lem. 5. huius.

Secundo loco supponantur duæ sectiones A B, & E F similes inter se, & propositum, sit demonstrare quod axium figuræ, seu rectangula G B D, & K F I sint

ſint ſimilia, qua quidem, eſt propoſitio 3. libri 4. Mydorgij, eiuſque præparatio, ſeu conſtructio talis eſt (, & appono eius verba immutatis tantummodo literis figurarū) ſint à ſectione A B ordinatim ad axim B C applicatæ binæ quæquæ A C, Q R, & vt C B ad B R ita ſit, H F ad F V, ordinatimque à ſectione E F applicentur E H, T V *(ſubſequitur poſtea demonſtratio ſic.)* Quoniam igitur ſimiles ponuntur ſectiones A B, E F, & ſunt H F, F V portiones portionibus C B, B R ſimiles, *(ideſt proportionales)* vt B C ad C A, ita erit F H ad H E, & vt B R ad R Q, ita erit F V ad V T, &c.

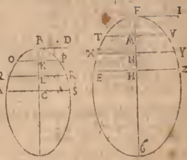
Huiuſmodi verba ſubtiliori trutina expendenda ſunt. In præparatione, ſeu conſtructione aſſumit abſciſſas B C, & F H abſque vlla lege, aut determinatione; ergo ſumi poſſunt cuiuſcunq; longitudinis: quare fieri poteſt vt C B ad latus rectum B D non habeat eandem proportionem quàm habet F H ad F I, & tunc ſi ex C B, H F diuidantur proportionaliter, & ducantur potentiales, &c. A C ad C B habebit maiorem, aut minorem proportionem quàm E H ad H F, & pariter Q R ad R B non habebit eandem rationem, quàm T V ad V F, & ſic vlterius in tota ſerie; ſed ex hoc ſequitur, quod poſſint eſſe figuræ axium inter ſe non ſimiles; Mydorgius autem ſimiles eſſe concludit; igitur ex eadem hypotheſi, & ex eadem definitione deducitur, quod ſectiones ſimiles habent figuras axium ſimiles inter ſe, & non ſimiles, quod eſt impoſſibile; non igitur definitio à Mydorgio tradita legitima, & perfecta eſt: quod fuerat oſtendendum. Lem. 2. huius. Coroll. 2. Lem. 5. huius.

Quod vero definitio à me reformata tribui poſſit Apollonio conijcitur præcipuè ex demonſtratione ſecundæ partis propor. 12. ibi enim ex hac ſuppoſitione, quod

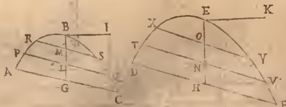


ſcilicet duæ ſectiones A B, & E F ſint ſimiles deducit earum figuras ſimiles eſſe. Ait enim: quia eſt A C ad C B vt E H ad H F, & eandem proportionē habent earum quadrata, atque quadratum H F ad rectangulum: F H *b* eandem proportionem habet quàm quadratum C B ad rectangulū B C *a* (eo quod H F ad F *b* poſita fuit vt C B ad B *a*) ergo, &c. *Modo ſi accuratè hæc verba perpendantur non poterit hic vſurpari vulgata definitio Eutocij, vel Mydorgij; nam cum ſectiones A B, E F ſupponantur ſimiles, ea tantummodo quæ in definitione ſimilium ſectionum perhibentur concedi poſſunt, & nihil amplius; igitur ſi in definitione non includitur particula illa [abſciſſa H F, C B ad erecta, vel tranſuerſa latera F* b, *B* a *ſint proportionalia] deſtrantis po-*

tis potius, quàm demonstrantis esset dicere. Eo quod H F, ad F *b* posita fuit vt C B ad B *a*; *vbi nam, aut quando hoc suppositum est, si in definitione non continetur? Nec suspicari potest casu hæc verba in textu irrepsisse, cum in alijs locis repetantur, & ab eis pendeat tota demonstratio; igitur in definitione vulgata addenda est illa particula*, abscissæ sint in eadem ratione ad erecta;

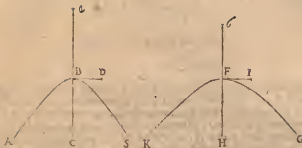


Rursus in propos. 11. & 1. parte 12. quando conclusio demonstrationis est quod sectiones A B, E F similes sint: tunc quidem quia tenetur ostendere Apollonius definitionem traditam conuenire sectionibus A B, E F, non assumit incautè, abscissas homologas C B, H F, sed ait in 11. propositione ponamus C B ad B D vt H F ad F I, & *in 12. inquit*, nam posuimus H F ad F *b* vt C B ad B *a*, &c. *Postea in propositione 16. litera a*: ergo M A ad A P, *idest abscissa ad erectum* est vt O C ad C Q, *seu vt homologa abscissa ad latus rectum*, & angulus O æqualis est M: patet igitur, vt diximus in 11. ex 6. quod si, &c. *Ex quibus locis satis apertè colligitur (ni fallor.) id quod supra rationibus non leuibus insinuaui, quod abscissæ proportionales esse debent erectis in sectionibus similibus.*



Sed hic animaduertendum est, eandem definitionem non posse æquè aptari sectionibus conicis, atque segmentis conicis similibus, vt perperam censuit Mydorgius: nam in segmentis conicis similibus A B C, & D E F diametrorum æquè ad bases inclinatarum abscissæ homologæ ex sui natura determinatæ sunt; quandoquidem non possunt esse maiores, neque minores quàm G B, & H E, quæ inter bases A C, & D F segmentorum conicorum, & vertices B, E intercipiuntur; at si in conicis sectionibus A B S, & K F G sint axes transuersi a B, & b F Propos. 12. huius lib. 1. *ad sua latera recta B D, & F I in eadem proportione, tunc quidem similes erunt curuæ lineæ A B S, & K F G, quæ possunt habere indeterminatas, & multiplices longitudines, immo possunt in infinitum prolongari, si fuerint parabolæ*

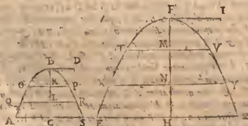
vel



vel hyperbola, nec habent bases, à quibus circumscribantur, igitur in sectionibus similibus A B, & G F homologa axium abscissa B C, F H non supponuntur iam dissectæ, & determinatæ; quare possunt esse cuiuscunque mensura, & habere possunt eandem, & non eandem proportionem ad conterminas potentiales; & ideo ad vitandam incertitudinem adiungi debet determinatio, quod prædicta homologa abscissæ B C, F H proportionales sint lateribus rectis B D, F I, at in segmentis, seu portionibus sectionum conicarum similium inutilis omnino esset illa determinatio. An verò hæc mea sententia omninò reyci debeat alijs indicandū relinquo.

Notæ in Proposit. XI.

a CVmque B C ad B L posita sit vt H F ad F N, &c. *Quia inuertendo D B ad B C eandem proportionem habet quàm I F ad F H, & C B ad B L est vt H F ad F N; ergo ex æquali ordinata D B ad B L eandem proportionem habebit, quàm I F ad F N; estque ordinatim applicata Q L media pro-*



portionalis inter abscissam B L, & latus rectum B D (cum in parabola quadratum Q L æquale sit rectangulo L B D) pariterque X N media proportionalis est inter F N, & I F; ergo Q L ad L B est vt X N ad N F, & antecedentium dupla, scilicet Q R ad L B, atque X Y ad N F in eadem ratione erunt. Non secus ostendetur Q P ad K B vt T V ad M F. 11 lib.1.

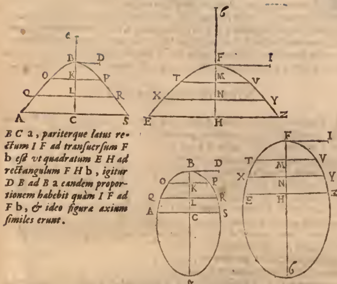
Notæ in Proposit. XII.

SVpponamus itaque sectiones A B, E F, earum inclinati, vel transuersi B a, F b, & erecti eorum B D, F I ordinationes, & propositiones, vti diximus, &c. *Idest. Sint axes inclinati, siue transuersi B a, F b, & maneant signa, ordinationes, & proportiones eædem, quæ in præcedenti propositione; scilicet fiat C B ad B D, vt H F ad F I, & quia D B ad B a est vt I F ad F b (propter similitudinem figurarum D B a, I F b) ergo ex æquali C B ad B a erit vt H F ad F b; & comparando antecedentes ad summas terminorum in hyperbola, & ad differentias in ellipsi erit B C ad C a vt F H ad H b: postea diuidantur tam B C, quàm F H in ijsdem rationibus in punctis K, L, M, N, & educantur ordinatim applicatæ, seu æquidistantes basibus O P, Q R, A S, T V, X Y, E Z.* a

Quoniam figura sectionis A B similis est figuræ sectionis E F erit quadratum H E ad H b in H F, vt quadratum A C ad C a in C B, & b H in H F ad quadratum H F, vt C a in C B ad quadratum C B (nam posuimus H F ad F b, vt C B ad B a, &c.) *Quoniam in figuris, seu rectangulis similibus D B a, & I F b habet D B ad B a eandem proportionem, quàm* b

21. lib. 1. *I F ad F b, & vt D B ad B a, ita est quadratum A C ad rectangulum B C a, pariterque vt I F ad F b ita est quadratum E H ad rectangulũ F H b sed (sicut in præcedenti nota dictum est) C a ad C B, seu rectangulum B C a ad quadratum C B eandem proportionem habet, quàm H b ad H F, seu quàm rectangulum F H b ad quadratum F H; igitur ex æqualitate quadratum A C ad quadratum C B eandem proportionem habet, quàm quadratum E H ad quadratum H F.*

Atque quadratum H F ad H F in H b est vt quadratum C B ad B C in C a (eo quod H F ad F b posita fuit C B ad B a), ergo ex æqualitate, &c. *Idest sumātur axium abscissæ C B, H F, quæ sint proportionales lateribus rectis B D, & F I, seu proportionales sint lateribus transuersis B a, & F b, & secetur abscissa B C, & F H proportionaliter in punctis K, L, M, N, & per puncta diuisionum ducantur ordinatim applicatæ A C, Q L, E H, X N, &c. Quia sectiones A B, E F supponuntur similes; ergo ex definitione 2. huius A C ad C B eandem proportionem habebit, quàm E H ad H F, nec non Q L ad L B erit vt X N ad N F; & ideo quadratum A C ad quadratum C B eandem proportionẽ habet, quàm quadratum E H ad quadratum H F; & quia ex constructione iuxta leges definitionis 2. vt C B ad B a ita erat H F ad F b, & comparando antecedentes ad terminorũ summas in hyperbolis, & ad differentias in ellipsibus, habebit B C ad C a; seu quadratum B C ad rectangulum B C a candẽ proportionem quàm F H habet ad H b, seu quàm quadratum F H habet ad rectangulum F H b; ergo ex æqualitate quadratum A C ad rectangulum B C a eãdem proportionem habet, quàm quadratum E H ad rectangulum F H b; est verò latus rectum D B ad latus transuersum B a, vt quadratum A C ad rectangulum B C a,* c

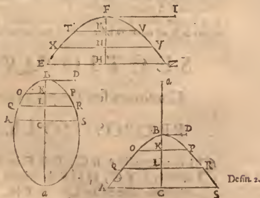


B C a, *pariterque latus rectum I F ad transuersum F* b *est vt quadratum E H ad rectangulum F H* b, *igitur D B ad B* a *eandem proportionem habebit quàm I F ad F* b, *& ideo figuræ axium similes erunt.* 21. lib. 1.

Notæ in Proposit. XIII.

a Sint axes earum B C, & inclinatus, seu transuersus B *a*, &c. *Addidi verba, quæ in expositione propositionis deficiunt. Hyperbole, seu ellipsis A B sit axis B C, & inclinatus, seu transuersus B* a, *& E F sit parabole, cuius axis F H, &c.*

b Alioquin fit (si possibile est) similis vni earum, & minima similis earum figuræ, quæ non sunt similes suis figuris: deinde possumus producere in singulis sectionibus potentes, &c. *Non nulla verba ex hoc textu expunxi vt superuacanea eiusq; sensus hic est. Si enim parabola E F similis est hyperbolæ, aut ellipsi A B (ex definitione similium figurarum) duci possunt in vnaquaque duarum similium sectionum ordina-* Defin. 2.

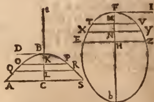


natim

natim ad axium applicata, numero pares, quæ ad abſciſſas ſint proportionales, tum abſciſſæ inter ſe: Vnde ſequitur poſtrema concluſio, quæ in textu habetur, quod nimirum rectangulum a *L B ad rectangulum* a *K B eandem proportionem habeat, quàm abſciſſa, L B ad abſciſſam K B: ſed quotieſcunque duo rectangula eandem proportionem habent, quàm baſes, illa ſunt æque alta: igitur altitudines* a *L, &* a *K æquales ſunt inter ſe, pars, & totum: quod eſt abſurdum.*

Notæ in Propoſit. XIV.

Alioquin ſequitur, quod quadratum R L ad quadratum K P, &c. *In propoſitione deficit expoſitio, quæ talis eſt. Sit A B qualibet hyperbole, & E F qualibet ellipſis. Dico A B ipſi E F ſimilem non eſſe. Sint eorum axes latera tranſuerſa, & recta eadem, quæ in præcedenti propoſitione poſita ſunt. Et ſiquidem ſectiones A B, & E F ſimiles credantur, neceſſario ex definitione ſecunda, duci poterunt ad axes ordinatim applicatæ numero pares proportionales abſciſſis, tum abſciſſæ inter ſe proportionales: & vt in præcedenti propoſitione oſtenſum eſt, quadratum R L ad quadratum P K, ſcilicet* a



21.lib.1. *rectangulum* a *L B ad rectangulum* a *K B in hyperbola eandem proportionem habebit, quàm quadratum T N ad quadratum V M, ſeu quàm rectangulum* b
Ibidem. *N F ad rectangulum* b *M F in ellipſi, ergo rectangulum* a *L B ad rectangulum* a *K B eandem proportionem habet, quàm rectangulum* b *N F ad rectangulum* b *M F: ſed eorundem rectangulorum baſes proportionales ſunt, eo quod L B ad B K erat vt N F ad F M; igitur earundem altitudines proportionales erunt, ſcilicet* a *L ad* a *K eandem proportionem habebit, quàm* b *N ad* b *M, ſed in hyperqola* a *L maior eſt, quàm* a *K; in ellipſi verò contra* b *N minor eſt, quã* b *M; igitur maior* a *L ad minorem* a *K eandem proportionem habebit, quàm minor* b *N ad maiorem* b *M. Quod erat abſurdum.*

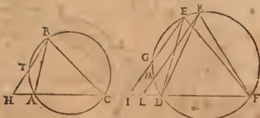
SECTIO QVINTA

Continens ſex Propoſitiones Præmiſſas,

PROPOSITIO I. II. III. IV. & V.

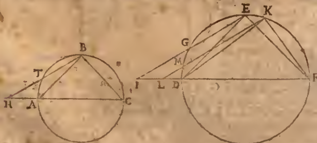
SI in triangulis A B C, D E F in duobus circulorum ſegmentis A T C, D G F deſcriptis, à duobus angulis B, E, educantur duæ rectæ lineæ B T H, E G I efficientes cum baſibus A C, D F duos angulos H, I æquales (incidentes in 1

prima

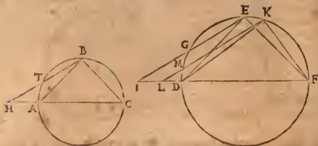


prima figura extra duo ſegmenta , & in ſecunda intra, at in ter-
tia intra duos ſemicirculos). , & fuerit proportio plani rectan-
guli ex portionibus lineæ baſis inter angulum prouenientem, &
2 duos angulos reliquos trianguli , nempe A H in H C ad qua-
dratum interceptæ inter prouenientem angulum , & circuli peri-
pheriam , nempe ad quadratum H B in quolibet caſu eadem
ſit , quàm D I in I F ad quadratum I E , vel H A in H C ad
quadratum H T ſit , vt D I in I F ad quadratum I G ; ſintque
duo priores anguli, inter ſe æquales , & prouenientes extra duo
3 triangula poſiti : vel duo priores recti , & prouenientes intra
4 duos angulos non ſint recti ; aut duo priores non recti, & pro-
uenientes recti intra duo triangula : vel duo priores diuerſæ ,
5 aut eiuſdem ſpeciei, ſed duæ lineæ efficiant duos angulos æqua-
les cum lateribus duorum triangulorum ſubtendentibus angulos
prouenientes : vtique duo priora triangula ſunt ſimilia.

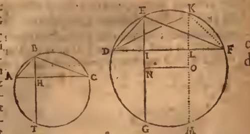
Quia C H in H A; nempe T H in H B ad quadratum H B, quod eſt, vt H T ad H B eandem proportionem habet, quàm D I in I F, nempe



G I in I E ad quadratum I E, quod eſt vt I G ad I E, erit B H ad H T, vt E I ad I G; ſimiliter, & eorum quadrata; oſtendetur igitur ex æqua-



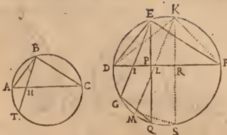
litate, quod si fuerit A H in H C ad quadratum H B, vt D I in I F ad quadratum I E, quod A H in H C ad quadratum H T sit etiam, vt I D in I F ad quadratum I G. Dico iam, quod triangulum A B C simile est triangulo D E F. Si enim hoc verum non est, non erit angulus A æqualis vni duorum angulorum D, vel F: sitque angulus D maior, quàm A, & fiat angulus K D F æqualis A, iungaturque F K; quia angulus K, veluti E, est æqualis angulo B; similia erunt triangula A B C, D K F, & educamus K L parallelam E I: quare K L F simile quoque erit B H C b ideoque H A ad H B est vt D L ad L K, & H C ad H B, vt F L ad L K; igitur H A in H C, nempe B H in H T ad quadratum H B, quod est, vt H T ad H B, quæ ostensa est, vt I G ad I E, erit vt D L in L F, nempe K L in L M ad quadratum K L: & propterea M L ad L K erit vt G I ad I E in omnibus figuris; & hoc est absurdũ in prima figura: in secunda verò secentur bifariam E G, K M in N, O, & iungatur N O, quæ parallela erit L I, quia sunt duæ perpendiculares super K M, E G, quæ sunt parallelæ; ergo I N est æqualis L O, & quia E G ad E I iam ostensa est vt K M ad K L; ergo E N ad E I est, vt O K ad K L: & diuidendo erit N I ad I E, vt O L, quæ est æqualis N I ad L K. Et hoc quoque est absurdum. c d



In figura autem tertia educamus duas perpendiculares E P Q, K R S e super diametrum D F, cui occurrant in P, R: & iungamus G Q, M S, quia erat G E ad E I, vt M K ad L K, & propter similitudinem triangulorum I E P, K L R, E I ad E P est, vt L K ad K R, atque E P ad E Q est, vt R K ad K S, & angulus G E Q æqualis est M K S; ergo E G

Q simile

Q simile est M K S; quare angulus G æqualis est angulo M, & propterea peripheriæ E F Q, & K F S, quibus insistunt, æquales erunt, quod est absurdũ: est enim E F Q maior, quàm K F S; ergo duo triãgula A B C, D E F in omnibus figuris sunt similia. Quod erat ostendendum.



PROPOSITIO
Præmissa VI.

a DEinde sint duo anguli B, E qualescunque; sed angulus A B H, vel C B H æqualis angulo D E I, aut F E I: & supponantur reliqua omnia iam dicta.

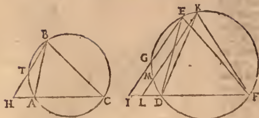
Quia proportio C H in H A ad quadratum H B supposita est, vt F I in I D ad quadratum I E, & H C, vel H A ad H B est, vt F I, vel D I ad I E; erit etiam H A ad H B, vt I D ad I E, & duo anguli H, I sunt æquales; igitur triangulum H B A, aut H B C simile est triangulo E D I, aut E F I, quare duo triangula A B C, D E F similia sunt; Et hoc erat ostendendum.

Notæ in Proposit. Præmissas I. II. III. IV. & V.

AFferuntur in hac sectione aliquæ propositiones simul coaceruatæ, quæ lemmaticæ sunt, & vsum habent in sequentibus propositionibus; sanè coniectur ex hoc titulo PRAEMISSAE rubeis characteribus inscripto, huiusmodi lẽmata Textui Apollonij ab Arabico Interprete, vel ab aliquo alio superaddita fuisse; licet Pappus Alexandrinus libro 7. afferat eadem ferè lemmata, tanquã propria, & conferentia ad Apollonij sexti libri intelligentiam.

Potest tamen propositio vniuersalis breuius exponi hac ratione. Si à verticibus duorum triangulorum à duobus circulis comprahensorum rectæ lineæ ductæ efficiant cum basibus angulos æquales; atque eorundem segmentorum inter basim, & peripheriam interceptorum quadrata ad rectangula sub factis segmentis ba-

 sium



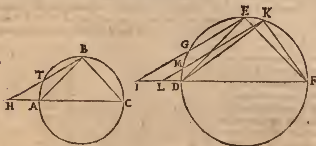
ſium eandem proportionem habeant, fuerintque anguli verticales inter ſe æquales, vel qui à lateribus, & à vertice ductis continentur, ſint æquales: ſemper triangula erunt ſimilia.

Dico iam, quod triangulum A B C ſimile eſt triangulo D E F, ſi enim a
hoc verum non eſt, ſit angulus D maior, quàm angulus A, &c. *Textus alterari debuit, nam duo triangula B A C, & E D F ponuntur non ſimilia, & propterea æquiangula non erunt, ſcilicet non habebunt duos angulos æquales duobus angulis alterius trianguli; ſed ex hypotheſi anguli verticales A B C, & D E F æquales erant; ergo angulus B A C non erit æqualis angulo E D F, neque angulo E F D; alias dicta triangula eſſent æquiangula, & ſimilia, quod non ponitur; igitur neceſſe eſt, vt angulus A non ſit æqualis vni duorum angulorum D, vel F, poſtea rectangulorum A H C, & D I F tam latus A H ipſius H C non ſit maius, quàm D I ipſius I F, & ad punctū D fiat angulus F D K æqualis angulo A.*

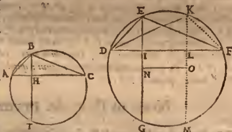
Quare K L F ſimile quoq; erit B H C, &c. *Quoniā angulus F D K æqualis* b
eſt factus angulo C A B, & angulus F K D ſeu ei æqualis F E D eſt ipſi angulo A B C æqualis (cum in ſimilibus circulorum ſegmentis exiſtant), igitur in triangulis F K D, & C B A tertius angulus K F D æqualis erit tertio angulo C; & propter parallelas K L, E I eſt angulus D L K æqualis angulo D I E; eſt verò angulus A H B ex hypotheſi æqualis eidem angulo D I E; ergò angulus D L K æqualis eſt angulo A H B, & F L K æqualis angulo C H B: at oſtenſus fuit angulus K F L æqualis angulo B C H; ergo angulo C B H æqualis eſt angulus F K L; ideoque triangula C B H, & F K L ſimilia erunt. Pariterq; duo triangula B A H, & K D L ſimilia erunt, cum angulus L æqualis ſit angulo H, & angulus K D L æqualis ſit interno B A H.

Et hoc eſt abſurdum in prima figura, &c. *Quoniam ſunt rectæ lineæ in* c
circulo applicatæ K M, E G parallelæ inter ſe; ergo coniunctæ rectæ lineæ E K, G M parallelæ erunt inter ſe, aut conuenient extra circulum cum diametro biſsariam, & ad angulos rectos diuidente applicatas E G, K M; ſed eadem recta linea G M ſecat trianguli baſim F A I intra circulū, aut extra ipſum inter puncta I, A, & F; (propterea quod angulus E I F conſtituitur à duabus in circulo applicatis extra ipſum concurrentibus); ergo tres coniunctæ rectæ lineæ K E, M G, & I L, nec ſunt omnes inter ſe parallelæ, nec in vno puncto cōueniunt, & propterea E I, & K L, ſecta

secta non erunt proportionaliter in punctis G, & M, sed prius ostensa fuit B I ad I G vt K L ad L M; quod est absurdum.



d In secunda verò secentur bifariam E G, K M in N O, &c. *Sunt enim in tertio casu K M, & E G perpendiculares ad basim D F; igitur si secentur bifariam in O, & N coniuncta recta linea N O diameter circuli erit, quandoquidem diuidit bifariam duas equidistantes in circulo applicatas; & ideo eas secat ad angulos rectos, sicuti D F easdem perpendiculariter secabat; & propterea I N O L parallelogrammum erit, cuius latera opposita N I, & O L aequalia erunt. Postea quia ostensa fuit I G ad I E, vt L M ad L K; ergo summa terminorum ad consequentes proportionales erunt; scilicet G E ad E I erit vt M K ad K L, & antecedentiũ semisses N E ad E I; vt O K ad K L: & diuidendo, duae aequales N I, O L eandẽ*

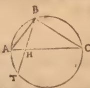


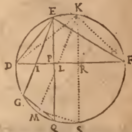
Lem. 1.

proportionem habebunt ad I E, & L K; ideoq; I E aequalis est L K. Et quoniã triangulum A B H simile est triangulo D K L; ergo A H ad H B eandem proportionem habet, quàm D L ad L K; estque triangulum B H C simile triangulo K L F; ergo B H ad H C est vt K L ad L F, & ex aequalitate vt A H ad H C ita est D L ad L F; erat autem segmentum A H non maius segmento H C; ergo D L maius non erit segmento L F; sed erat segmentum D I non maius segmento I F, igitur duo segmenta D I, & D L non sunt maiora, idest non sunt maiora medietate totius D F, sed diameter parallela ipsis K M, & E G secat D F bifariam; ergo K M, E G ad easdem partes diametri cadunt versus D, & sunt inter se parallelae; ergo inaequaliter à centro distant; ideoque inaequales erunt inter se, & earum meditates N E, O K inaequales erunt; & ablatis aequalibus N I,

I, O L remanebunt I E, L K inæquales. Quod est absurdum: ostensæ enim fuerunt prius æquales inter se.

In figura autem tertia ducamus duas perpendiculares, &c. *In quarto casu supponuntur bases A C, & D F per centra circulorum transire, eo quod anguli A B C, & D E F recti supponuntur, atque rectæ lineæ B H, E I non sunt perpendiculares super easdem bases, licet intra circulos efficiant angulos B H C, & E I F inter se æquales: perfecta igitur constructione, vt prius ad diametrũ D F, ducãtur ex punctis E, & K perpendiculares E Q, K S, quæ diuidẽtur bifariã, & ad angulos rectos in P, & R. Et quoniam (vt in præcedenti casu ostẽsum est) G E ad E I eandem proportionem habet, quàm M K ad K L, eumque latera I E, L K sint parallela, pariterque P E, & K R æquidistent, atque bases I P, L R in directum posita sint, erunt triangula I E P, & L K R æquiangula, & similia: & propterea I E ad E P erit, vt L K ad K R: est verò P E ad eius duplam E Q, vt R K ad eius duplam K S (cum diameter secet eas bifariam, quas perpendiculariter prius secabat) ergo, ex æquali ordinata, erit G E ad E Q, vt M K ad K S; suntq; anguli verticales G E Q, & M K S æquales, propterea quod continẽtur à rectis lineis quæ bina binis sunt æquidistantes; ergo triangula G E Q, & M K S similia sunt inter se: & propterea angulus E G Q æqualis erit angulo K M S.* e

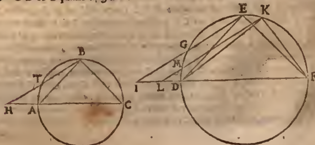




Et propterea segmentum E F Q maius simile erit segmento K F S minori: quod est absurdum, &c. *Legendum puto. Et propterea peripheria E F Q, & K F S, quibus insistunt æquales erunt: quod est absurdum. Est enim E F Q maior, quàm K F S.* f

Notæ in Proposit. Præmiss. VI.

DEinde sint duo anguli B, E qualescumque; sed angulus A B H, vel C B H æqualis angulo D E I vel F E I, & conditiones, vti dixi- a



mus, &c. *Expositio, atque demonstratio huius propositionis obscura est propter nimiam eius breuitatem: itaque duo eius casus distingui debent hac ratione. In duobus triangulis A B C, D E F supponantur anguli H, & I aequales, pariterque anguli H B A, I E D aequales inter se; ideoque duo triangula A B H, & D E I similia erunt, & propterea A H ad H B eandem proportionem habebit, quàm D I ad I E; sed ex vniuersali hypothesi rectangulum C A H ad quadratum H B eandem proportionem habet, quàm rectangulum F I D ad quadratum I E, & componuntur proportiones rectangulorum ad quadrata iam dicta ex rationibus laterum circa angulos aequales H, & I, suntque ostensae proportiones A H ad H B, atque D I ad I E eadem inter se; igitur reliquae componentes proportiones, scilicet C H ad H B, atque F I ad I E eadem quoque erunt inter se, & comprahendunt angulos aequales H, & I; igitur triangula C H B, & F I E similia sunt inter se: & propterea angulus B C A aequalis erit angulo E F D, sed anguli B A C, & E D F aequales sunt inter se, quia eorum consequentes aequales erant in triangulis aequiangulis B A H, & E D I, igitur duo triangula B A C, & E D F aequiangula, & similia inter se erunt.*

Simili modo si supponantur anguli C B H, & F E I aequales, cum anguli H, & I aequales sint, erunt triangula B C H, & E F I similia inter se, & vt prius, ostendentur quoque triangula ablata B A H, E D I aequiangula, & similia inter se (propterea quod circa angulos aequales H, & I habent latera proportionalia); & ideo residua triangula C A B, & F D E erunt quoque similia, vt propositum fuerat.

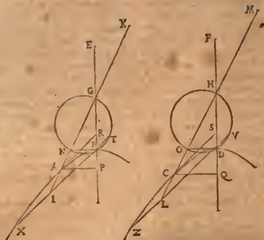
SECTIO SEXTA

Continens Proposit. XV. XVI. & XVII.

PROPOSITIO XV.

Duarum hyperbolarum, aut ellipsium, si figurae diametrorum, quae axes non sint, fuerint similes, atque potentes contineant cum diametris angulos aequales: vtique sectiones sunt similes.

Sint sectiones A B, C D hyperbolicae, vel ellipticae earum diametri, quae non sint axes I A K, L C M, & earum centra G, H, & duo axes sint E B, F D: & educamus duas tangentes A R, C S ad duos axes, quae continebunt cum duabus diametris A K, C M duos angulos aequales, eo quod parallelae sunt potentialibus ad diametros eductis; & educamus à B, D ad duabus diametros A K, C M tangentes B N, D O, & circumducamus super triangula B N G, H D O duos circulos, & ex A, C educamus ad axes duas potentiales A P, C Q, & per B, D ducamus I B T, L D V parallelas ipsis A R, C S, quae secent duos circulos in B,
b T, D, V: eritque G I in I N, scilicet ei aequale T I in I B ad quadratum



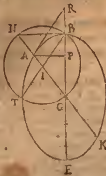
tum potentialis I B, vt H L in L O, seu L V in L D ad quadratum L D, eò quod quælibet ex dictis proportionibus eadem est proportioni figuræ K A, & M C (39. ex 1.), ergo T I ad I B est, vt V L ad L D, & angulus I, qui æqualis est ipsi R A G æqualis est angulo L, qui æqualis est S C H; igitur angulus G æqualis etiam est angulo H: & propterea G A R simile est H C S, & pariter G A P, H C Q sunt similia, quia P, Q sunt recti, vnde A P R, C Q S sunt etiã similia, & proportio vniuscuiusq; eorum, nempe G P, P R ad P A, est, vt proportio H Q, S Q ad C Q; igitur G P in PR ad quadratum P A, nempe B E ad erectum illius (39. ex 1.) est vt H Q in Q S ad quadratum C Q, nempe D F ad erectum illius (39. ex 1.); igitur figuræ duorum axiũ sunt similes, & duæ sectiones similes sunt (12. ex 6. (sed oportet in ellipsi, vt duæ diametri; ideoque duo axes sint simul aut transuersi, aut simul recti. Et hoc erat propositum.

37. lib. 1.

Propos. 2. præmiss.

C

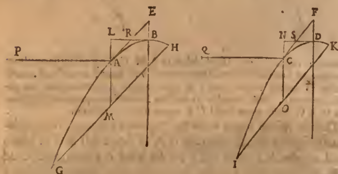
37. lib. 1.





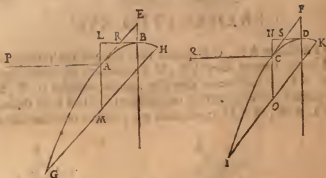
PROPOSITIO XVI.

SI ſectiones A B, C D ſimiles inter ſe, quæ ſint prius parabolæ, tangant lineæ A E, C F terminatæ ad earum axes E B, F D, & contineant cum illis angulos æquales E, F, & in qualibet earum educantur ordinationes G H, I K ad diametros L A M, N C O tranſeuntes per puncta contactus axibus



æquidiſtantes, & fuerit proportio ſuarum abſciſſarum A M, C O ad lineas tangentes A E, C F eadem; vtique ordinationes abſcindent ex ſectionibus ſimilia ſegmenta, & ſimiliter poſita, vt G A H, I C K. Si verò ordinationes ſecuerint ſimilia ſegmenta; vtique ſectiones ſimiles erunt, & abſciſſarum ad lineas tangentes proportio erit eadem, atque lineæ tangentes continebunt cum axibus angulos æquales.

Educamus enim duas B L, D N ſuper duos axes B E, F D perpendiculares, quæ tangent ſectiones in B, D: & ponamus A P ad duplam A 32. lib. 1.
E, vt R A aſſumpta ad A L ei ſimilem, nec non C Q ad duplam C F, vt aſſumpta S C ad C N; igitur P A, Q C ſunt erecti duarum diametrorum L M, N O (52. ex 1.) ergo G M poteſt P A in A M, (12. ex 1.) 49 lib. 1.
& ſimiliter I O poteſt O C in C Q, (12. ex 1.) & propter æquidiſtan- 11. lib. 1. Ibidem.
tiam E B, L A, atque F D, C N ſunt ſimilia E R B, R L A, atque D S F, S N C; & duo anguli E, F ſuppoſiti ſunt æquales; igitur angulus R A L æqualis eſt S C N, & N, L ſunt recti; quare R A ad A L, nempe P A ad duplam A E eſt, vt S C ad N C, nempe vt Q C ad duplam C F, & M A ad A E ſuppoſita eſt, vt O C ad C F: ergo M A ad A P
a eſt, vt O C ad C Q, & angulus O æqualis eſt M. Oſtendetur igitur (vt



diximus in 11. ex 6.) quod si ad abscissas A M, C O egrediantur quælibet potentes, ad sua abscissa candē proportionē habebunt si abscissæ ad abscissas sint in eadem proportione, & quod anguli à potentialibus, & abscissis contenti, erunt æquales in duabus sectionibus: quare erit segmentum H A G simile segmento I C K atque similiter positum.

Defin. 7. huius.

Deinde ijsdem signis in eisdem figuris manētibus, vt prius designatis supponatur, segmentum H A G simile ipsi K C I. Dico, quod angulus E æqualis erit F, & M A ad A E erit, vt O C ad C F.

Defin. 7.

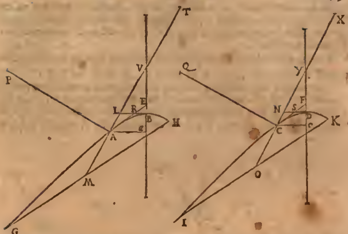
Quoniam duo segmenta sunt similia erit angulus O æqualis M, & duo anguli E A L, F C N illis æquales, sunt quoque inter se æquales; ergo duo anguli F, E, qui illis æquales sunt, erunt inter se æquales, eoquod A E, C F parallelæ sunt G H, I K, & anguli N, L sunt recti; ergo duo triangula proportionis sunt similia, ideoque R A ad A L, nempe P A ad duplam A E est, vt C S ad C N, nempe Q C ad duplam C F: & quia G M potest P A in A M (12. ex 1.) & similiter I O potest Q C in C O; b ergo P A ad G M est, vt Q C ad O I, & G M ad M A est, vt I O ad O C; quia duo segmenta sunt similia, & E A ad A M est, vt C F ad C O: & iam ostensum est, quod duo anguli E, F sunt æquales. Et hoc erat ostendendum.

49. lib. 1. 11. lib. 1.

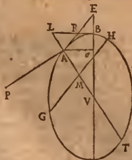
PROPOSITIO XVII.

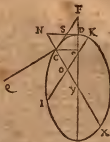
Deinde sectiones sint hyperbolicæ, aut ellipticæ, & reliqua a supponantur, vt prius.

Educamus C c perpendicularē super axim D F, & A a perpendicularem super axim B E; atque V, Y sint duo centra. Ergo (propter similitudinem duarum sectionum) erit V a in a E ad quadratum A a potentis, vt Y c



vt Y *c* in *c* F ad quadratum C *c* (39. ex 1.) quæ habent eandem proportionem, quàm figuræ axis habent, & angulus F ſuppoſitus eſt æqualis 37.lib. 1. 12. huius.
b E : ergò Y *c* C ſimile eſt V *a* A : & propterea angulus Y æqualis eſt V, 6. præuiſ. huius.
& angulus F C Y æqualis E A V : & propter ſimilitudinem N D Y, L B V æquales ſunt duo anguli C N S, A L R; ergo ſimilia ſunt C N S, A L R. Quare C S aſſumpta ad ei coniugatam C N eſt vt R A ad A L : & ponamus C Q ad duplam C F, vt C S ad C N, nec non A P ad duplam A E, vt A R ad A L; igitur Q C, A P ſunt erecti duarum diametrorum C Y X, A V T (53. 54. ex 1.) ſed C F ad C X duplam ipſius C Y eſt 50.lib. 1.
vt A E ad A T duplam ipſius A V, propter ſimilitudinem C F Y, A E V: ergo ex æqualitate Q C ad C X diametrum inclinatam, ſeu tranſuerſam
c eſt vt A P ad A T; & propterea figuræ earundem diametrorum ſunt ſimiles, & quia C O ad C F ſuppoſita eſt, vt A M ad A E: ergo ex æqualitate Q C ad C O eſt, vt P A ad A M : Quare potentes ad duo eius abſciſſa C O, A M, à quibus diuidũtur bifariam, eãdem proportionem habent: & proportio abſciſ





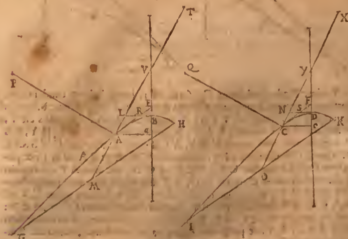
ſarum in vna ſectionum ad homologa abſciſſa alterius eſt eadem (12. ex 6.), & anguli compræhenſi à potentibus, & abſciſſis ſunt æquales; quia æquales ſunt duobus angulis R A L, S C N æqualibus, & propterea duo ſegmenta ſunt ſimilia.

Defin. 7. huius.

Poſtea oſtendetur, quod ſi duo ſegmenta fuerint ſimilia, erit angulus F æqualis E, & A M ad A E, vt O C ad C F.

Defin. 7. huius.

Quia propter ſimilitudinem duorum ſegmentorum continebunt potentes cum ſuis abſciſſis angulos æquales, & erit proportio potentium ad abſciſſas eadem, & proportio abſciſſarum, in vna earum ad ſua homologa in altera, erit eadem. Et quia V a in a E ad quadratũ a A eandem propor-

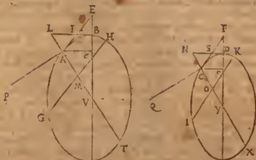


tionem habet, quàm Y c in c F ad quadratum c C, & duo anguli a, & c ſunt recti; atque angulus C, nempe O æqualis eſt A, nempe M, propter ſimilitudinem ſegmentorum: ergo triangulum A E V ſimile eſt C F Y, & angulus V æqualis eſt angulo Y; pariterque angulus E æqualis eſt F, & A V ad A E eandem proportionem habet, quàm Y C ad C F. Ponamus iam P A ad duplam A E, vt Q C ad duplam C F; ergo ex æqualitate A T diameter ad A P erectum eius eſt, vt C X diameter ad C Q

21. lib. 1. erectum eius (53. 54. ex 1.) & T M in M A ad quadratum M G eandẽ proportionem habet, quàm X O in O C ad quadratum O I: at ſuppoſitum eſt quadratum A M ad quadratum M G, vt quadratum C O ad quadratum O I; ergo ex æqualitate T M in M A ad quadratum A M, nempe T M ad M A, eandem proportionem habet, quàm X O in O C ad

qua-

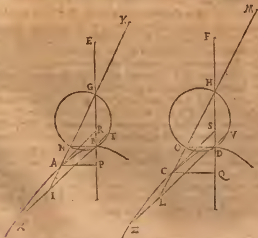
quadratū O C, nempe X O ad O C; quare diuidendo, vel cōponendo, & ex æqualitate A M ad A E eſt vt C O ad C F: & iā oſtenſū eſt, quod duo anguli F, & E ſunt æquales. Quare patet propoſitum.



Notæ in Propoſit. XV.

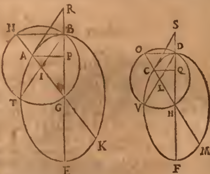
a SI figuræ diametrorum hyperbolarum, aut ellipſium fuerint ſimiles diſſimilium axium, & potentes illarum diametrorum contineant ſimul angulos rectos, vtique ſectiones ſimiles ſunt, &c. *Textus mendoſus huius propoſitionis ex ſubſequenti expoſitione, & demonſtratione corrigi debuit.*

b Et G I in I N æquale ipſi T I in I B ad quadratum I B potentis eſt, vt H L in L O æquale ipſi V L in L D ad quadratum L D; quia, &c. *Quoniam à puncto B ſectionis A B ad diametrum K A I ducuntur ordinatim applicata B I, & B N contingens ſectionem in B ſecantes diametrum in I, & N; igitur rectangulum G I N ad quadratum ordinatim applicata I B eandem pro-* 37. lib. 1.



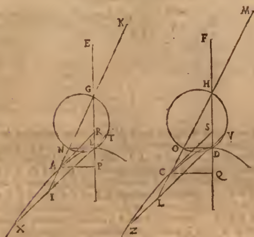
por-

portionem habebit, quàm latus transuersum K A ad eius latus rectum: eadem ratione in sectione C D erit rectangulum H L O ad quadratum ordinatim applicatæ D L, vt latus transuersum M C ad eius latus rectum; propterea quod à puncto D ducitur D O sectionem contingens, & D L ordinatim applicata ad diametrum M C, ei occurrentes in L, & O. Et quoniam ex hypothesi latus transuersum K A ad eius latus rectum eandem proportionem habet, quàm latus transuersum M C ad eius latus rectum, cum figuræ harum diametrorum suppositæ sint similes; ergo rectangulum G I N ad quadratum I B eandem proportionem habet, quàm rectangulum H L O ad quadratum L D: deinde quia in duobus triangulis G B N, & H O D sunt duo anguli G B N, & H D O æquales, Conuers. 32. lib. 1. *nempe recti (cum B N, & D O sectiones contingentes in terminis axium E B, & F D efficiant cum ipsis angulos rectos) atq; à verticalibus angulis B, & D ducuntur ad bases rectæ lineæ B I, D L efficientes angulos I, & L æquales, eo quod æquales sunt angulis æqualibus R A G, & S C H propter æquidistantiam linearum B I, A R, atque linearum D L, S C, & insuper rectangulum G I N ad quadratum I B eandem proportionem habet, quàm rectangulum H L O ad qua-* Propof. 2. præmiss. *dratum L D; igitur triangula G B N, & H D O similia sunt inter se; & propterea angulus G æqualis erit angulo H.*



Et proportio vniuscuiusque eorum, nempe G P, P R ad P A est, vt proportio H Q, Q S ad C O; &c. *In triangulis enim similibus G P A, & H Q C circa angulos rectos P, & Q erit G P ad P A, vt H Q ad Q C: pariter in duobus triangulis similibus R P A, & S Q C habebit R P ad P A eandem porportionem quàm, S Q ad Q C; proportio verò rectanguli G P R ad quadratum P A componitur ex ijsdem rationibus laterum circa angulum rectum P: pariterque proportio rectanguli H Q S ad quadratum Q C ex rationibus laterum circa angulum rectum Q componitur, suntque ostensæ prædictæ componentes proportiones eadem inter se; igitur rectangulum G P R ad quadratum P A eandem proportionem habebit, quàm rectangulum H Q S ad quadratum Q C; sed habet rectangulum G* 37. lib. 1. *P R ad quadratum P A eandem proportionem, quàm axis transuersus E B ad eius latus rectum (propterea quod ab eodem puncto A sectionis ducitur contin-* Ibidem. *gens A R, & ordinatim applicata ad axim A P) atque eodem modo rectangulum H Q S ad quadratum Q C eandem proportionem habet, quàm axis transuersus F D ad eius latus rectum; igitur axis transuersus E B ad eius latus rectum eandem proportionem habet, quàm latus transuersum F D ad eius latus rectum; & propterea figuræ axium duarum sectionum A B, & C D similes inter se erunt; & ideo conicæ sectiones similes erunt.* 12. huius.

Sed



Sed oportet in ellipsi, vt duo axes sint simul, aut transuersi, aut recti simul, &c. *Addidi verba, quæ videntur in textu deficere. Sed oportet in ellipsi, vt duæ diametri, ideoque duo axes sint simul, aut transuersi, aut simul recti. Licet enim multoties diametri coniugatæ ellipsium æquales esse possint, nihilominus eæ sumi debent, quæ ad easdem partes respiciunt axes transuersos, alias constructio, atque demonstratio non sequeretur, vt manifestum est.*

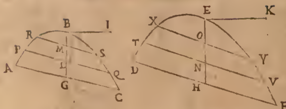
MONITVM.

P*Ro intelligentia propos. 16. & 17. præmitti debent tria hæc lemmata.*

LEMMA VI.

S*I in duobus parabolicis segmentis A B C, & D E F bases A C, & D F cum diametris G B, & H E æquales angulos G, & H non rectos contineant, atque efficiant abscissas G B, & H E diametrorum ad latera recta B I, & E K proportionalia; erunt segmenta similia inter se.*

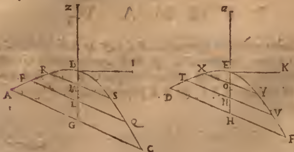
Secentur



Secentur diametrorum abscissæ G B, & H E in ijsdem rationibus in L, M, N, O, & ab ysdem punctis educantur basibus æquistantes, seu ad diametros ordinatim applicatæ P Q, R S, T V, X Y. Quoniam ex hypothesi G B ad B I 11.lib. 1. *est, vt H E ad E K; estque A G media proportionalis inter G B, & B I; paríterque D H media proportionalis est inter H E, & E K; igitur A G ad G B est, vt D H ad H E; Et quoniam inuertendo L B ad B G est, vt N E ad E H, atque B G ad B I posita fuit, vt H E ad E K; ergo ex æquali ordinata L B ad B I erit, vt N E ad E K, quare vt L B ad P L, mediã proportionalẽ inter L B, & I B, ita erit N E ad N T mediam proportionalem inter N E, & E K. Eodem modo ostendetur, quod R M ad M B eandem proportionem habet, quàm X O ad O E: & hoc semper continget in quibuslibet alijs diuisionibus proportionalibus abscissarum, suntque anguli G, & H æquales; igitur segmenta A B C, &* Defin.7. huius. *D E F similia sunt inter se. Quod erat ostendendum.*

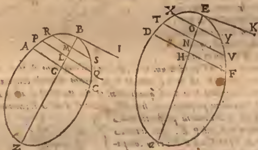
L E M M A VII.

SI in duobus segmentis A B C, & D E F hyperbolicis, aut ellipticis, bases A C, & D F cum diametris G B, & H E, æquales angulos G, & H obliquos continentes, efficiant abscissas G B, & H E proportionales lateribus rectis B I, & E K, atque transuersis B Z, & E a, erunt segmenta similia inter se.



Sece-

Secentur abscissæ G B, & H E in iisdem rationibus, ducanturque ordinatim applicatæ vt in precedenti factum est. Quoniam G B ad B I est, vt H E ad E K, & inuertendo Z B ad B G est, vt a E ad E H, ergo ex æquali ordinata Z B latus transuersum ad B I latus rectum erit, vt a E latus transuersum alterius sectionis ad E K eius latus rectum: est vero rectangulum Z G B ad quadratum ordinatim applicatæ G A, vt latus transuersum Z B ad rectum B I; pariterque rectangulum a H E ad quadratum ordinatim applicatæ D H, vt transuersum a E ad latus rectum E K, suntque prædicta latera figurarum ostensa proportionalia; igitur rectangulum Z G B ad quadratum A G eandem proportionem habet, quàm rectangulum a H E ad quadratum D H; sed quadratum B G ad rectangulum Z G B eandem proportionem habet, quàm G B ad G Z (propterea quod G B est illorum altitudo communis) pariterque quadratum E H ad rectangulum a H E est, vt H E ad H a, seu vt G B ad G Z; igitur quadratum G B ad rectangulum Z G B eandem proportionem habebit, quàm quadratum E H ad rectangulum a H E; quare ex æquali quadratum G B ad quadratum G A eandem proportionem habebit, quàm quadratum E H ad quadratũ H D; ideoque inuertendo A G ad G B erit vt D H ad H E. Rursus, quia inuertendo L B ad B G est vt N E ad E H; sed G B, atque H E ad latera trãsuersa proportionalia sunt; igitur L B ad B Z erit vt N E ad E a; & propterea, vt prius quadratum L B ad rectangulum Z L B erit, vt quadratum E N ad rectangulum a N E; estque rectangulum Z L B ad quadratum ordinatim

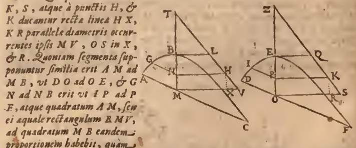


applicatæ P L, vt rectangulum a N E ad quadratum T N, (scilicet vt latera transuersa ad recta, quæ proportionalia ostensa sunt); igitur ex æquali ordinatã quadratũ B L ad quadratum P L eandem proportionẽ habebit, quàm quadratũ E N ad quadratum T N; quare vt prius dictum est, P L ad L B eandem proportionem habebit, quàm T N ad N E; & hoc semper contingit in reliquis omnibus diuisionibus abscissarum in eisdem rationibus sectis; suntque anguli G, & H æquales inter se, licet non recti; igitur (ex definitione 7.) segmenta A B C, & D E F similia sunt inter se. Quod erat ostendendum.

L E M M A VIII.

SI duo hyperbolica, aut elliptica ſegmenta A B C, D E F fuerint ſimilia, quorum baſes A C, D F efficiant cum diametrorum abſciſsis B M, E O angulos æquales M, & O; ſintque eorum tranſuerſa latera T B, Z E, recta vero B L, E Q. Dico figuras eorum; ſiue rectangula T B L, & Z E Q ſimilia eſſe.

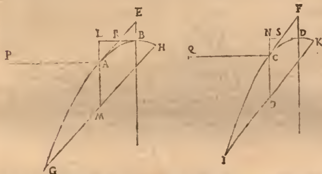
Secentur ſegmentorum abſciſſa M B, O E proportionaliter in N, P, & per ea puncta ducantur ordinatim ad diametros applicata G N, I P æquidiſtantes baſibus, efficientes abſciſſas B N, E P, coniunganturq; duæ rectæ lineæ T L, Z Q ſecantes rectas lineas N H, M V, P K, O S æquidiſtantes lateribus rectis B L, E Q in punctis H, V, K, S, atque à punctis H, & K ducantur rectæ lineæ H X, K R parallelæ diametris occurrentes ipſis M V, O S in X,
Defin. 7. huius. *& R. Quoniam ſegmenta ſupponuntur ſimilia erit A M ad M B, vt D O ad O E, & G N ad N B erit vt I P ad P E, atque quadratum A M, ſeu*
12. 13. lib. 1. *ei æquale rectangulum B M V, ad quadratum M B eandem proportionem habebit, quàm*
Ibidem. *quadratum D O, ſeu ei æquale rectangulum E O S ad quadratum O E; ſed vt rectangulum B M V ad quadratum M B ita eſt M V ad M B (cum M B ſit eorum altitudo communis) pariterque vt rectangulum E O S ad quadratum O E, ita eſt O S ad O E; quare M V ad M B eandem proportionem habebit, quàm O S ad O E; non aliter oſtendetur N H ad N B eandem proportionem habere, quàm P K ad P E: erat autem*
Lem. 1. lib. 5. *M B ad B N vt O E ad E P; ergo comparando antecedentes, & poſtea conſequentes ad differentias terminorum erit B M ad M N vt E O ad O R; atque B N ad N M eandem proportionem habebit, quàm E P ad P O. Quare ex æquali V M ad M N erit vt S O ad O P, atque H N ad N M erit vt K P ad P O; & differentia ipſarum V M & H N ideſt X V ad M N, ſeu ad X H eandem proportionem habebit, quàm differentia ipſarum S O, & K P, ideſt S R ad O P, ſeu ad R K; quapropter V X ad X H erit vt S R ad R K; ſed quia X V, L B inter ſe, nec non X H, & B T ſunt parallelæ, atq; etiam S R, Q E inter ſe, nec nõ R K, & E Z ſunt æquidiſtantes; erunt triangula V X H, & L B*



T similia, pariterque triangula S R K, & Q E Z inter se similia; ideoque erit L B ad B T vt V X ad X H, pariterque Q E ad E Z erit vt S R ad R K; erat autem prius V X ad X H, vt S R ad R K; igitur L B ad B T eandem proportionem habebit, quàm Q E ad E Z; & propterea circa rectos angulos B, E, figuræ sectionum similes erunt inter se. Quod erat ostendendum.

Notæ in Proposit. XVI.

a ERgo M A ad A P est vt O C ad C Q, & angulus O æqualis est M, ostendetur (vt diximus in 11. ex 6.) quod, &c. *Sequitur enim ex æqualitate ordinata, quod M A ad A P eandem proportionem habet, quàm O C ad C Q, cumque sint duo segmenta parabolica H A G, & K C I, quorũ diametri A M, & C O efficiunt cum basibus G H, & K I angulos M, & O æquales inter se (cum sint æquales angulis R A L, & S C N æqualibus à contingentibus*



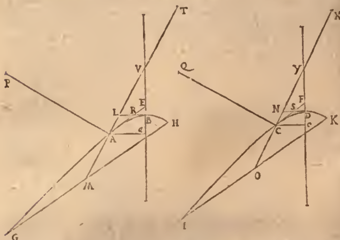
verticalibus parallelis basibus, & à diametris contentis) atque abscissa M A ad latus rectum A P eandem proportionem habet, quàm altera abscissa O C ad C Q latus rectum alterius sectionis; igitur duo segmenta H A G, & K C I similia sunt inter se. Lem.6. huius.

b Et quia G M potest A P in A M, & similiter I O potest C Q in C O; ergo P A ad G M est, vt C Q ad I O, & G M ad M A est, vt I O ad O C; quia duo segmenta sunt similia, & E A ad A M, est vt F C ad C O; &c. *Sensus huius textus confusi, talis est. Quia segmenta H A G, & K C I similia supponuntur erit A M ad M G, vt C O ad O I, & quadratum A M ad quadratum M G erit vt quadratum C O ad quadratum O I; est verò rectangulum P A M æquale quadrato G M; pariterque rectangulum Q C O est æquale quadrato I O; igitur quadratum A M ad rectangulum P A M eandem proportionem habet, quam quadratum C O ad rectangulum Q C O; & propterea M A ad A P eandem proportionem habebit, quàm C O ad C Q; sed prius ostensa fuit P A ad A E, vt Q C ad C F; igitur ex æquali ordinata erit M A ad A E,* Defin.7. huius. 11. lib. 1.

ad A E, vt O C ad C F, suntque anguli E, & F æquales, vt dictum est. Et hoc erat propositum.

Notæ in Proposit. XVII.

a Deinde sint sectiones hyperbolicæ, aut ellipticæ, & reliqua in suo statu, &c. *Idest. Supponantur sectiones hyperbolicæ, vel ellipticæ A B, & C D similes inter se, scilicet figuræ axium V B, & Y D sint similes inter se, atque à verticibus A, & C duarum diametrorum A M, & C O ductæ sint re-*



ctæ lineæ contingentes A E, & C F, efficientes cum axibus angulos A E B, & C F D æquales, sintque H G, & K I ordinatim ad diametros applicatæ, scilicet æquidistantes contingentibus verticalibus; & habeat abscissa M A ad portionem contingentis A E eandem proportionem, quàm abscissa O C habet ad portionem contingentis C F; Dico segmenta H A G, & K C I similia esse inter se.

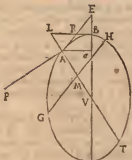
b Ergo Y c C simile est V a A, &c. *Quoniam duæ ordinatim ad axes applicatæ A a, & C c perpendiculares sunt ad axes, erunt in triangulis A a E, & C c F duo anguli a, & c recti: atque ex hypothesi duo reliqui anguli E, & F æquales quoque sunt; igitur tertius angulus a A E æqualis est tertio angulo c C F, cumque in duobus triangulis V A E, atque Y C F ab eorum verticibus A, & C ducuntur ad bases V E, & Y F duæ rectæ lineæ A a, & C c continentes cum basibus angulos æquales, nempe rectos, & rectangulum V a E ad quadratum a A eandem proportionem habet, quàm rectangulum Y c F ad quadratum*

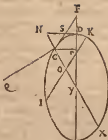
ex 37. lib. 1. c C, *vt in textu ostensum est: atq; duo anguli a A E, & c C F æquales ostensi*

Propos. 6. præmiss. *sunt inter se; igitur erunt triangula V A E, & Y C F similia inter se; ergo angulus V æqualis est angulo Y, atque angulus E A V æqualis erit angulo F C*

Y:

Y: postea, quia B L, & D N contingunt sectiones in verticibus axium efficient angulos V B L, & Y D N rectos, cũque duo anguli V, & Y ostensi sint æquales, in triangulis V B L, Y D N, anguli V L B, & Y N D æquales erunt inter se, & qui deinceps A L R, & C N S sunt æquales inter se; & ideo triangula A R L, & C S N similia sunt inter se.





Conuerſ. 32.lib.1.

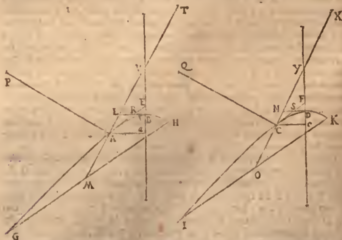
c Et propterea figuræ earundem diametrorum sunt similes, &c. *Quia ex hypothesi M A ad A E erat, vt O C ad C F; atque (propter similitudinem triangulorum A E V, & C F Y) vt E A ad duplam ipsius A V, seu ad latus transuersum A T, ita est F C ad duplam ipsius C Y, seu ad latus transuersum C X alterius sectionis; ergo ex æquali ordinata erit M A ad A T, vt O C ad C X; ostensum autem fuit latus transuersum T A ad A P latus rectum eius habere eandem proportionem, quàm alterius sectionis latus transuersum X C ad eius latus rectum C Q; ergo ex æquali ordinata M A ad A P eandem proportionem habet, quàm O C ad C Q; quare duæ abscissæ A M, & O C eandem proportionem habent ad latera recta, atque ad transuersa earundem diametrorum, atque efficiunt bases H G, & K I cum diametris angulos M, & O æquales inter se: propterea quod æquales sunt angulis E A V, & F C Y æqualibus (propter æquidistantiam rectarum H G, & A E; nec non K I, & C F) igitur erunt duo segmenta H A G, & K C I similia inter se.* Defin. 7. huius.

d Quia propter similitudinem duorum segmentorum continebunt potentes cum suis abscissis angulos æquales: & erit proportio potẽtium ad abscissa eadem, & proportio abscissarum in vna earum ad alia similia eadẽ, quia V a in a E ad quadratum A a, est vt Y c in c F ad quadratum C c, & duo anguli a, & c sunt æquales; ergo angulus Y æqualis est angulo V, & angulus C, nempe O æqualis A, nempe M propter similitudinem duorum segmentorum; igitur A E V simile est Y F C, & angulus E;&c. *In hoc textu nonnulla verba deficiunt, aliqua verò transposita sunt, vt nullus sensus colligi possit: tamen eum restitui posse censeo vt ibidem videre est. Quoniam duo segmenta H A G, & K C I supponuntur similia efficient diametri A M, & C O cum basibus G H, & K I angulos M, & O æquales, licet non rectos; eruntque figuræ earumdem diametrorum similes inter se: & propterea habebit* Lem. 8. huius. *T A ad eius erectum eandem proportionem, quàm X C ad eius latus rectum;* 15. huius. *igitur sectiones A B, & C D similes sunt, idest ductis axibus V B, & Y D* 47. lib. 2. *erunt figuræ axium similes inter se: ducuntur verò à punctis A, & C ad axes* 12. huius. *ordinatim applicatæ A a, & C c, atque contingentes A E, & C F; igitur re-* 37. lib. 1.

ctangu-

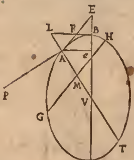
ctangulum V a E ad quadratum a A eandem proportionem habebit, quàm axis transuersus ad eius erectum, seu quàm axis transuersus alterius sectionis C D ad eius erectum: sed in eadem proportione est rectangulum T c F ad quadratũ
37. lib. 1. *c C; igitur in duobus triangulis A V E, & C T F recta A a, & C c cũ basibus angulos aequales a, & c, nempe rectos efficiunt, cum ordinatim applicatæ sint ad axes; atque duo anguli verticales V A E, & T C F aequales sint inter se, cum propter parallelas aequales sint angulis O, & M aequalibus in segmentis similibus;*
Propos. 7. præmiss. *igitur duo triangula A E V, & C F T aequiangula, & similia sunt inter se: & propterea V A ad A E erit, vt T C ad C F, &c.*

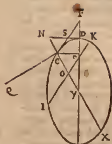
Ponamus iam P A ad duplam A E, vt Q C ad duplam C F: ergo ex æqualitate A T diameter ad A P erectum eius, &c. *In hoc textu nonnulla videntur deficere, eiusq; sensus talis erit. Quia veluti supra dictum est, triãgula R A L, & S C N similia sunt inter se, habebit R A ad A L eandem proportionem, quàm S C ad C N: Ponamus iam P A ad duplam A E, vt R A ad A L, & Q C ad duplam C F, vt S C ad C N, erunt A P, & C Q latera recta diametrorum A M, & O C; sed earundem diametrorum figuræ ostensæ sunt*
30 lib. 1. Lem. 8. *similes; igitur latus transuersum A T ad A P erectum eius est, vt latus transuersum X C ad C Q erectum eius. Et quia vt latus transuersum ad rectum*



21. lib. 1. *ita est rectangulum T M A ad quadratum M G, & similiter rectangulum X O C ad quadratum O I eandem proportionem habebit, quàm latus transuersum ad rectum, scilicet eandem, quàm habent latera figurarũ earundẽ diametrorũ; igitur rectangulum T M A ad quadratum M G eandem proportionẽ habebit, quàm rectangulum X O C ad quadratum O I; habet verò M G ad M A eandem proportionem, quàm I O ad O C propter similitudinem segmentorum; ergo quadratum G M ad quadratum M A erit vt quadratum I O ad quadratum O C: & propterea ex aequali ordinata rectangulum T M A ad quadratum M A, seu T M ad A M*

ad A M eandem proportionem habebit, quàm X O C ad quadratum O C, seu eandẽ, quàm habet X O ad C O, & comparando consequẽtes ad differẽtias terminorum M A ad A T eandem proportionem habebit, quàm O C ad C X: erat autẽ prius T A ad A E, vt X C ad C F; igitur ex æquali M A ad A E erit, vt O C ad C F, & fuerunt ostensi anguli E, & F æquales. Quod erat ostendendum.

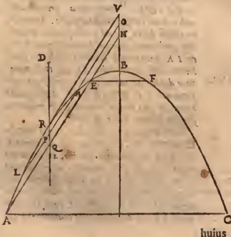




SECTIO SEPTIMA

Continens Proposit. XVIII. & XIX.

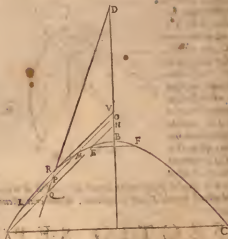
CVIuslibet sectionis A B C duo segmenta C F, A E cadentia inter duas ordinationes A C, E F ad vtrasque partes axis B V sunt inter se similia, & similiter posita, nec sunt similia alteri segmento (nisi in ellipsi, in qua quatuor segmenta memorata in propositione 8. sunt æqualia, similia, & similiter posita, quæ alteri segmẽto similia nõ sunt.



a Quoniam vnumquodque eorum alteri congruit, nec non cõgruunt duo segmenta G I, K H in ellipsi (7. 8. ex 6.) at non sunt similia alteri segmento; si enim hoc fieri potest, sit segmentum L M simile segmento F C. Et quia F C congruit A E. Ergo duo segmenta L M, A E sunt similia, producamus A E, L M

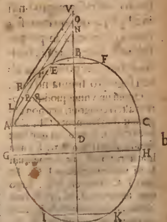
b quousque occurrant axi in N, O, erit angulus N æqualis O (vti demonstrauimus in 16. & 17. huius

huius) atque A N pa-
rallela erit L O. Edu-
catur iam R Q bifariã
diuidens A E, L M in
P, Q: quare erit diame
28. lib. 2. ter sectionis (32. ex 2.)
& educatur R V paral-
lela A N, quæ sectionẽ
17. lib. 1. continget (18. ex 1.).
Et quia duo segmen-
ta L M, A E sunt si-
16. 17. huius. milia habebit maior
Q R ad eandem R V
eandem proportionẽ,
quàm habet minor R
P; quod est absurdum.
Quare non sunt similia
duo segmenta A E, C
F alteri segmento.
Quod erat ostenden-
dum.



Notæ in Proposit. XVIII. & XIX.

Qvuoniam vnumquodque eorum alteri congruit, nec non congruunt duo segmenta G I, K H in ellipsi (7. 8. ex 6.) at non sunt similia alteri segmento; &c. *Idest. Sit prius sectio A B C parabole, vel* a
7. huius *hyperbole. Quoniam duæ A C, & E F ordinatim ad axim B D applicatæ abscindunt ex vtraque parte axis duo segmenta A E, & C F congruentia, propterea similia erunt, atque similiter posita. Secundo, in ellipsi ducta sint ad axim quatuor ordinatim applicatæ, quarum bina extrema E F, & I K æqualiter à centro D distent; pariterque bina intermedia A C, & G H æqua-*
8. huius. *liter distent ab eodem centro: quare quatuor segmenta G I, H K, C F, & A E æqualia erunt, & sibi mutuo congruent, & propterea similia quoque inter se erunt.*



Erit angulus N æqualis O, vti demõstrauimus, &c. *Quoniam duo segmenta L M, & A E, ponuntur similia, atque eorum bases L M, & A E productæ occurrunt axi* b
Prop 16. 17. huius. *in O, & N: igitur vt demonstratum est, anguli à contingentibus verticalibus segmentorum similium L M, & A E cum axi communi B D eiusdem sectionis continebunt an-*

gulos

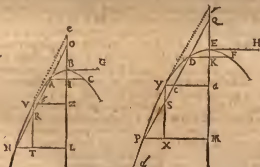
gulos aquales; ij verò anguli aquales sunt angulis O, & N, cum bases L M, & A E parallelæ sint contingentibus verticalibus eorundem segmentorum; igitur anguli L O B, & A N B æquales sunt inter se; & propterea duorum segmentorũ bases L M, & A E parallelæ sunt inter se.

SECTIO OCTAVA

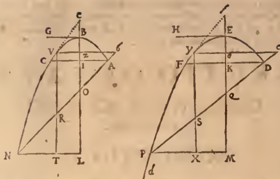
Continens Proposit. XX. & XXI. Apollonij.

PROPOSITIO XX.

a SI in quibuslibet similibus conisectionibus A B C, & D E F ductæ fuerint ad axes B O, E Q ordinatim applicatæ A C, D F, N L, P M, quarum illæ, quæ ad easdem partes verticum B, & E ducuntur efficiant abscissas erectis proportionales, scilicet I B ad B G sit, vt K E ad E H, nec non L B ad B G, vt M E ad E H: Dico segmenta facta ab ordinatis similiter positis esse inter se similia, ac similiter posita, scilicet N A ipsi P D, atque A B ipsi D E, nec non N B ipsi P E.



b Sintque primò sectiones parabolæ; & educamus N A ad B L in O, & P D ad M E in Q. Et quia G B ad B I est, vt H E ad E K, & B L ad B G est vt M E ad E H; ergo L B ad B I, nempe L N ad I A potentia (19. ex 1.) nempe L N ad O I eandem proportionem habet, quàm M E ad E K, 20.lib. 1.



ad E K, nempe P M ad D K potentia, nempe M Q ad Q K, & per conuersionem rationis O L ad L I erit, vt Q M ad M K: estque I L ad L B, vt K M ad M E; ergo O L ad L B est, vt Q M ad M E, & L B ad L N est, vt E M ad M P (propter similitudinem duarum sectionum) ergo ex æqualitate O L ad L N erit, vt Q M ad M P; suntque M, & L duo anguli recti; ergo N L O simile est P M Q; & per R, S semipartitiones ipsarum N A, D P ducamus ipsas T V, X Y parallelas duobus axibus, & ex duobus punctis V, Y, educamus perpendiculares V Z, Y *a* super duos axes. Et quia N O ad O A est, vt P Q ad Q D comparando antecedẽtes ad semisses differentiarum terminorum vel ad semisummas eorũ fiet N O ad R O, nempe N L ad L T, quæ est æqualis ipsi V Z, nempe L B ad B Z longitudine (*19. ex 1.*) vt P Q ad Q S, nempe P M ad X M æqualem ipsi Y *a*, nempe longitudine, vt M E ad E *a* (*19. ex 1*) igitur comparando differentias terminorum ad antecedentes, erit Z L ad L B, vt *a* M ad M E, & L B ad L O est, vt M E ad M Q; ergo ex æqualitate L Z ad L O, nempe N *b* ad N O est, vt M *a* ad M Q, nempe P *c* ad P Q erat autem prius N R ad N O, vt S P ad P Q, & comparando semisũmas, vel semidifferentias terminorum ad eorundem differentias O R ad R *b* erit, vt Q S ad S *c*, & R *b* ad R V est, vt S *c* ad S Y; quia duo triangula V R *b*, Y S *c* sunt similia; ergo R O ad R V eandem proportionem habet, quàm Q S ad S Y; sed rangens in V perueniens ad L O æqualis est O R, cui parallela est; quia cadit inter duas lineas parallelas; & similiter tangens in Y parallela est S Q, & ei æqualis; ergo V R abscissa ad tangentem est, vt abscissa S Y ad eius tangentem, & angulus Q æqualis est angulo O; igitur duo segmenta N V A, P Y D sunt similia (*16. ex 6.*) & pariter duo segmenta A B C, D E F, atque duo segmenta N B, P E sunt similia inter se, & similiter posita.

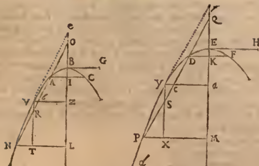
Defin. 2. (margin, beside "est, vt E M ad M P") — c

20. lib. 1. (margin, beside "qualem ipsi Y a") — d

Ibidem. (margin, beside "L Z ad L O") — e f g

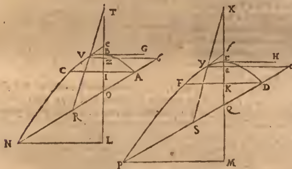
Deinde ponamus aliud segmentum P *d*. Dico non esse simile alicui prædictorum segmentorum, quia non abscinduntur à duabus ordinationibus vnius axis (*18. ex 6.*). Et hoc erat ostendendum. h

PROP.



PROPOSITIO XXI.

Sint postea duæ illæ sectiones hyperbolicæ, & ellipticæ similes, & earum centra T, X (remanentibus lineis, & signis, vt prius) & ducantur duæ contingentes V *e*, & Y *f*.



a Quoniam B G ad B I supposita est, vt H E ad E K, & pariter G B ad B L, vt H E ad E M; ergo ex æqualitate, & per conuersionem rationis
b B L ad L I est vt E M ad M K; & propter similitudinem duarum sectionum N L ad A I nempe L O ad O I est, vt M P ad D K, nempe M Q ad Q K, & antecedentes ad summas vel differentias terminorum, scilicet Lem. 1. lib. 1.
c O L ad L I eandem proportionem habebit, quàm Q M ad M K, & ex æqualitate O L ad L B erit, vt Q M ad M E, sed B L ad L N est, vt E M ad M P, cum ex suppositione sectiones sint similes; ergo O L ad L N est, vt Q M ad M P; suntque L, M duo anguli recti: ergo anguli O, Q,

 nempe

nempe *e*, *f* sunt æquales: deinde ducantur V Z, Y *a* ad axes ordinatæ; ergo (propter similitudinem duarum sectionum) T Z in Z *e* ad quadratum Z V eandem proportionem habebit, quàm X *a* in *a f* ad quadratum *a* Y, & angulus *e* æqualis est angulo *f*; igitur V *e* T simile est Y *f* X, & pariter O T R, Q X S; & propterea O *e* ad R V eandem proportionem habebit, quàm Q *f* ad Y S, & propter similitudinem duarum sectionum B I ad I A est, vt E K ad K D, & A I ad I O, vt D K ad K Q propter similitudinem duorum triangulorum; ergo (ex æqualitate, & comparando antecedentes ad summas vel differentias terminorum) erit B I ad B O, vt E K ad E Q, sed B T ad B I erat, vt X E ad E K (propter similitudinem duarum sectionum) ergo ex æqualitate, & rursus comparando antecedētes ad summas vel differentias terminorum B T ad T O erit, vt X E ad X Q, eumque T Z in Z *e* ad quadratum V Z sit vt X *a* in *a f* ad quadratum *a* Y (39. ex 1.) & quadratum V Z ad quadratum Z *e* est, vt quadratum *a* Y ad quadratū *a f* erit T Z in Z *e*, ad quadratū Z *e*, nempe T Z ad Z *e* vt X *a* in *a f* ad quadratum *a f* nempe G *a* ad *a f*, & comparādo antecedentes ad differentias terminorū in hyperbola, & ad eorum summas in ellipsi, fiet Z T ad T *e*, nēpe quadratum B T (quod est æquale ipsi Z T in T *e* (39 ex 1.) ad quadratum T *e* est, vt X *a* ad X *f*, nempe *a* X in X *f*, quod est æquale quadrato E X (39. ex 1.) ad quadratum X *f*; ergo B T ad T *e* potentia est, vt E X ad X *f*; & propterea

Propos. 6. præmiss.

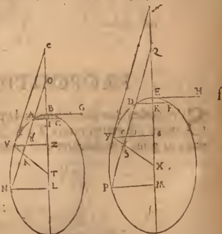
Lem. 1. lib. 5.

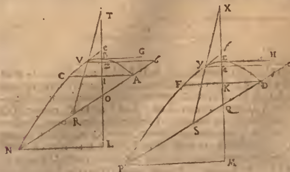
Ibidem.

37. lib. 1.

37. lib. 1.

Ibidem.



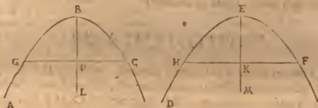


T B

T B ad T *e* erit, vt E X ad X *f*; & iam oſtendimus, quod B T ad T O eſt, vt E X ad X Q; igitur ex æqualitate, & comparando terminorum differentias ad conſequentes erit O *e* ad *e* T, vt Q *f* ad *f* X; ſed T *e* ad *e* V eandem proportionem habet quam X *f* ad *f* Y, eo quod oſtenſa ſunt ſimilia triangula V T *e*, Y X *f*; quare O *e* ad *e* V eſt vt Q *f* ad *f* Y; & iam oſtendimus, quod O *e* ad R V eandem proportionem habet, quàm Q *f* ad S Y; ergo R V ad V *e* eſt, vt S Y ad Y *f*, & angulus *e* æqualis eſt angulo *f*; igitur duo ſegmenta N V A, P Y D ſimilia ſunt inter ſe (17. ex 6.) & ſimiliter poſita. Inſuper dico, non eſſe ſimilia alicui alteri ſegmento; quia non abſcinduntur ab vna ordinatione, aut duabus, & earum diſtantia in ellipſi à centro non eſt æqualis (18. ex 6.), & hoc erat oſtendendum. Lem. 1. lib. 5.

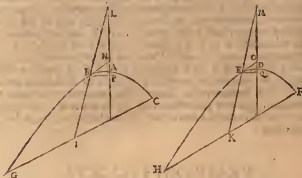
PROPOSITIO XXII.

Sectionum non ſimilium A B C, D E F vnum ſegmentum vnius non eſt ſimile alicui ſegmento alterius.



Si enim hoc verum non eſt, ſit ſegmentum G C ſectionis A B C (ſi fieri poteſt) ſimile ipſi H F alterius ſectionis D E F, & iungamus G C, H F, eaſdemq; bifariam ſecemus in I, K; iungamuſque L I, M K; quæ ſint duæ diametri, & ſecent ſegmenta in B, E: ſi itaque fuerint duo axes, cũ duo ſegmenta ſint ſimilia, vtique egrederentur in eorum ſingulis ordinationes ad duos axes, numero æquales, continentes cum axibus angulos rectos, & proportiones ordinationum ad ſua abſciſſa in qualibet earum a eſſent eædem, ac abſciſſæ ad abſciſſas proportionales quoque eſſent. Et propterea duæ ſectiones A B C, D E F ſimiles erunt, ſed iam ſuppoſitæ fuerunt non ſimiles; quod eſt abſurdum. Si verò I L, M K non fuerint axes, educamus ex B, E ad duos axes L P, M Q duas perpendiculares b B P, E Q, & duas tangentes B N, & E O: itaque (propter ſimilitudinẽ duorum ſegmentorum) ſimilia erunt B N L, E O M; & pariter L B P, M E Q; atque quadratum B P ad L B in P N, nempe in eadem proportione

46 lib. 2. Defin. 7. huius. Defin. 2. huius.



37.lib. 1. tione figuræ diametri A L (40. ex 1.) erit vt quadratum E Q ad M Q in O Q, nempe in eadem proportione figuræ diametri D M (40. ex 1.) Ibidem. quapropter duæ proportiones figurarum earundem sectionum sunt eædem inter se; & propterea duæ sectiones sunt similes (12. ex 6.) at suppositæ fuerunt non similes. Quod est absurdum.

PROPOSITIO XXIII.

13. huius. SI autem sectio A B C fuerit parabola, & sectio D E F hyperbola, aut ellipsis: manifestum est, sectiones non esse inter se similes. Et dico quod duo segmenta G C, H F non sunt similia.

Si enim similia essent haberent conditiones similitudinis, quod est impossibile, quemadmodum ostensum est in omnibus sectionibus ad propositionem 13. si vero vna earum fuerit hyperbole, altera verò ellipsis, idipsum ostensum est ad propositionem 14. Et hoc erat propositum. a

PROPOSITIO XXIV.

CViuslibet conisectionis A C D portio B A C D non erit arcus circuli.

Si enim hoc verum non est educamus in illa chordas A B, C D, A C, quarum nulla alteri sit parallela: & educamus E F parallelam A B, & E G parallelam A C, atque G H parallelam C D, & per singularum duarum æquidistantium semipartitiones iungamus K I, L M, N O, quæ qui-

dem

dem lineæ perpendiculares sunt ad prædictas chordas, suntque etiam diametri sectionis, ergo I K, L M, N O sunt axes, nec sibi in directum coincidunt; quia chordæ primo eductæ inter se parallelæ non erant: hoc autem est absurdum, quia in qualibet sectione reperiri non possunt plures, quàm duo axes (52. ex 2.); ergo fieri non potest, vt sectionis conicæ portio sit arcus circuli. Quod erat ostendendum. 48.lib. 2.

Notæ in Proposit. XX.

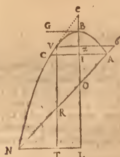
a Qvodlibet duorum segmentorum, vt A B C, D E F in duobus segmentis similibus, vt N A C, P D F abscissa sint ab ordinatis duorum axium sectionum, vt A C, D F, N L, P M, A M, A S, K M ad latus suarum verticum vt B, E; sitque proportio earum abscissarum ad erecta duorum segmentorum eadem, nempe I B ad B G, vt K E ad E H, & L B ad B G, vt M E ad E H: vtique duo segmenta A B C, D E F, N B, P E similia sunt, & similia positione: &c. *Textus hic*

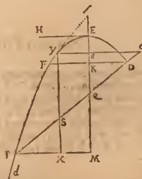
adeo corruptus est, vt ne Apollonius quidem, si reuiuisceret, sensum ex verbis tam inconcinnis, & non coherentibus elicere posset. Itaque diuinando eam esse veram lectionem censeo; quàm in textu apposui.

Educa-

Educamus itaque N A ad O ex B L, & P D ad Q ex M E, quia B G ad B I est, vt H E ad E K, & B G ad B L est vt H E ad E M; ergo L B ad B I, nempe L N ad A I (19. ex 1. (nempe L O ad O I est vt M E ad E K, nempe P M ad D K, nempe M Q ad Q K; & contra O L ad L I, vt V M ad M K, &c. *Addenda non nulla verba, quæ deficiunt, & reliqua restituenda censui, vt in textu leguntur. Quoniam B G ad B I est vt H E ad E K, & B L ad B G est vt M E ad E H; ergo, ex æqualitate, L B ad B I eandem proportionem habet, quàm M E ad E K, sed quadratum N L ad quadratum A I est in parabola, vt abscissa L B ad B I; pariterque quadratum P M ad quadratum D K est, vt M E ad E K: & propterea quadratum N L ad quadratum A I eandem proportionem habebit quàm quadratum P M ad quadratum D K; igitur N L ad A I eandem proportionem habebit, quam P M ad D* b

20. lib. 1.





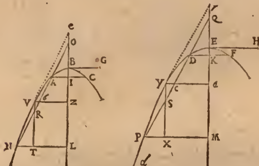
K; sed vt N L ad A I ita est L O ad O I (propter parallelas A I, N L, & similitudinem triangulorũ A I O, & O N L) pariterq; vt P M ad D K ita est M Q ad Q K (propter similitudinem triangulorum Q M P, & Q K D) igitur L O ad O I eandem proportionem habebit, quàm M Q ad Q K; & comparando antecedentes ad differentias, vel summas terminorum O L ad L I eandem proportionem habebit, quàm Q M ad M K.

Et B L ad L N est vt E M ad M P (propter similitudinem duorum segmentorum) ergo ex æqualitate O L ad L N, &c. *Sequitur quidem hoc non propter similitudinem segmentorum, quandoquidem segmenta similia non supponuntur sed quia semper parabolæ sunt similes, & in eis positæ sunt axium abscissæ L B, & M E proportionales lateribus rectis B G, & E H, propterea (vt in prop. 11. huius ostensum est) B L ad L N eandem proportionem habebit quàm E M ad M P; sed prius L B ad B I erat vt M E ad E K, ergo comparãdo differentias terminorum ad antecedentes erit I L ad L B vt K M ad M E, estq; ostensa O L ad L I vt Q M ad M K, ergo ex æquali ordinata O L ad L B erit vt Q M ad M E.* C

11. huius.

Et

d Et quia N O ad O A est vt P Q ad Q D inuertamus proportionem, deinde bifariam secemus duas tertias partes, & inuertamus eas quoque fiet N O ad O R, nempe N L ad L T in eadem ratione ipsi V Z, nempe L B ad B Z, vt D Q ad Q T, nempe P M ad P X æqualem ipsi Y a, nempe M E ad E a, &c. *Quoniam L O ad O I ostensa fuit vt M Q ad Q K, & propter parallelas I A, L N, nec non D K, M P est N O ad O A, vt L O ad O I; pariterq; P Q ad Q D est vt M Q ad Q K; igitur N O ad O A eandē proportionē habet, quàm P Q ad Q D, & comparando antecedentes ad semidifferentias, vel semisũmas terminorũ erit N O ad R A, vt P Q ad S D: & pro-*

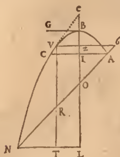


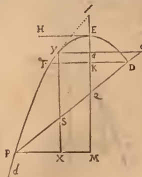
pterea N O ad O R summã, vel differentiã consequentium eandem proportionem habebit, quàm P Q ad Q S; sed propter parallelas R T, & O L est L N ad T L, vt N O ad O R: pariterque (propter parallelas S X, & Q M) est P M ad X M, vt P Q ad Q S; igitur N L ad L T eandem proportionem habet, quàm P M ad M X: suntque in parallelogrammis V L, & Y M latera opposita aqualia V Z ipsi T L, atque a Y ipsi X M; igitur N L ad V Z eandem proportionem habet, quàm P M ad Y a, & ita erunt earum quadrata; sed vt quadratũ N L ad quadratum V Z ita est abscissa L B ad abscissam B Z, pariterque vt quadratum P M ad quadratum Y a, ita est abscissa M E ad abscissam E a; ergo L B ad B Z eandem proportionem habet, quàm M E ad E a. 20 lib. 1.

e Et occurrere faciamus par pari remanet O R ad R b, vt Q S ad S c, &c. *Quoniam ostensa fuit O N ad O R, vt Q P ad Q S, per conuersionem rationis O N ad N R erit vt Q P ad P S, pariterque ostensa fuit b N ad N O, vt c P ad P Q; ergo ex aquali b N ad N R est vt c P ad S P, & diuidendo b R ad R N erit vt c S ad S P; sed erat inuertendo R N ad N O, vt S P ad P Q; quare comparando antecedentes ad differentias terminorum erit N R ad R O vt P S ad S Q; ideoq; rursus ex aqualitate b R ad R O erit vt c S ad S Q; estq; V R ad R b vt Y S ad S c (eo quod triangula V R b, & Y S c sunt similia triangulis similibus O N L, & Q M P propter aquidistantes) ergo ex aquali ordinata V R ad R O eandem proportionem habet, quàm Y S ad S Q.*

Sed tangens in V perueniens ad L O, &c. *Si enim ex punctis Y, V ducantur V e, & Y f tangentes parabolas, & producantur quousque secent axes in e, & f efficientur duo parallelogramma V e O R, & Y f Q S, in quibus tāgentes V e, & Y f efficientur æquales ipsis O R, & Q S: & propterea inuertendo R V abscissa ad contingentem V e æqualem ipsi R O eandem proportionem habebit, quàm abscissa S Y ad contingentem Y f æqualem ipsi S Q, atque efficiunt prædicta contingentes cum axibus angulos e, f æquales ipsis O, & Q æqualibus propter parallelas; igitur segmenta N V A, & P Y D similia sunt inter se.* f

Prop. 16. huius.

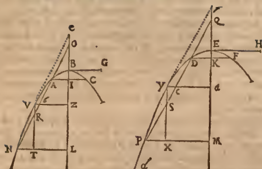




Et pariter duo segmenta A B C, D E F, atque duo segmenta N B, P E sunt similia inter se, & similiter posita, &c. *Hoc manifestum est, si enim coniungantur recta linea N C, & P F, & bifariam diuidantur, atque ducantur diametri, &c, vti fecimus in sectione N A, ostendetur similiter (ex eadem 16. propositione) segmenta N C, P F similia esse inter se. Non secus si coniungantur rectæ lineæ N B, & P E, & bifariam diuidantur, atque ducantur diametri, & reliqua perficiantur, vt prius, ostendentur eodem modo, segmēta N B, & P E similia inter se.* g

Deinde ponamus segmentū P d; quia non abscindunt illa duæ ordinationes vnius axis (18. ex 6.), & hoc erat, &c. *Sed legendum puto vt in textu apparet, & horum verborū sensus erit; fieri non potest, vt segmentū P d sit simile ipsi N A; vel N B, propterea quod in sectione P F segmenta P d vni tantummodo portioni simile est (præter quàm in ellipsi), & ambo intercipi debent à duabus ordinatim applicatis ad axim E Q: & propterea segmenta P D, vel P E non erunt similia ipsi P d, & quia N A ostensum est simile P D, pariterque N B ostensum est simile P E; igitur segmentum P d simile non est, neque N A, neque segmento N B; quod erat ostendundum.* h

NOTE

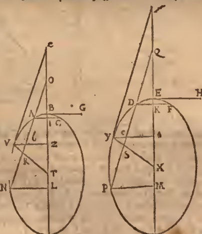


Notæ in Proposit. XXI.

a QVoniam G B ad B I, ſuppoſita eſt vt H E ad E K, &c. *Quia L B ad B G ex hypotheſi erat, vt M E ad E H, & inuertendo G B ad B I erat vt H E ad E K; ergo ex æqualitate L B ad B I erit vt M E ad E K; & per conuerſionem rationis B L ad L I erit vt E M ad M K.*

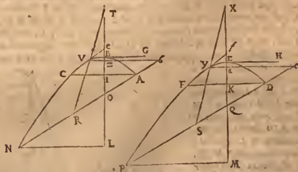
b Et própter ſimilitudinem duarum ſectionum N L ad A I, nempe L O ad O I eſt, vt P M ad F K, nempe M Q ad Q K, &c. *Quoniam duæ ſectiones N B, & P E ſimiles ſuppoſitæ ſunt, & axiũ abſciſſæ L B, M E, nec non I B, K E ad latera recta B G, & H E proportionales ſunt; igitur N L ad A I eandem proportionem habebit, quàm P M ad D K: & quia triangula N L O, & A I O ſimilia ſunt propter parallelas N L, & I A, pariterque triangula P M Q, & D K Q ſimilia ſunt; igitur L O ad O I erit vt N L ad I A; pariterque M Q ad Q K erit vt P M ad D K, ſeu vt N L ad A I: & propterea L O ad O I erit vt M Q ad Q K.* ex 12. huius.

c Et ex æqualitate L O ad L B erit vt Q M ad M E, ſed L B ad L N eſt vt M E ad M P, cum ex ſuppoſitione ſectiones ſint ſimiles, &c.



Quoniam O L ad L I ostensa fuit, vt Q M ad M K; atque prius ostensa fuit B L ad L I, vt E M ad M K; ergo inuertendo I L ad L B erit, vt K M ad M E; & propterea ex æqualitate O L ad L B erit vt Q M ad M E; sed B L ex 12. huius. *ad L N est, vt E M ad M P; igitur ex æqualitate O L ad L N erit vt Q M ad M P; suntque duo anguli L, & M recti; ergo triangula O L N, & Q M P æquiangula erunt; & propterea anguli O, & Q æquales inter se erunt; sed quia contingentes verticales V c, & Y f parallelæ sunt ordinatim applicatis N A, P D ad diametros V R, & Y S; igitur angulus V c B æqualis erit angulo N O L; pariterque angulus Y f E æqualis erit angulo P Q M; & propterea anguli c, & f æquales erunt inter se.*

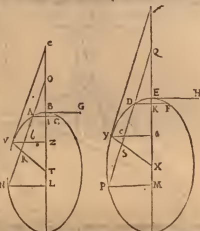
Ergo propter similitudinem duarum sectionum T Z in Z *e* ad quadratum Z V eandem proportionem habebit quàm X *a* in *a f* ad quadratum *a* Y, & angulus *e* æqualis est angulo *f*; igitur V *e* T simile est Y *f* X, & pariter, &c. *Quoniam in sectionibus similibus V B, & Y E axes transuersi* d
12. huius. *lateribus rectis proportionales sunt, & ducta sunt ad axes ordinatim applicata*
37. lib. 1. *V Z, Y a, & contingentes V c, Y f, estque rectangulum T Z c ad quadratum Z V, vt latus transuersum ad rectum, pariterque rectangulum X a f ad quadratum a Y, vt axis transuersus ad erectum; igitur rectangulũ T Z c ad quadratum Z V eandem proportionem habet, quàm rectangulum X a f ad quadratum a Y, & à verticibus V, Y duorum triangulorum V c T, & Y f X ducta sunt ad bases recta linea V Z, Y a efficientes angulos rectos, cum ordinatim*



applicata sint ad axes; atque angulus V c Z ostensus est æqualis angulo Y f a,
Propos. 6. præmiss. *igitur tertius angulus Z V c æqualis erit tertio angulo a Y f; & ideo duo triãgula V T c, & Y X f similia erunt inter se: & propterea circa angulos æquales T, & X latus c T ad T V eandem proportionem habebit, quàm f X ad X Y: cumque duæ contingentes verticales V c, Y f parallelæ sint ordinatim applicatis N A, & P D ad diametros V R, Y S, erit O c ad R V, vt c T ad T V; pariterque Q f ad S Y erit, vt f X ad X Y: erat autem c T ad T V, vt f X ad*
12. huius. *X Y; igitur pariter O c ad R V eandem proportionem habebit, quàm Q f ad S Y; sed B I ad I A est, vt E K ad K D.*

Sed

e Sed B T ad B I erat vt X E ad E K propter similitudinem duarum sectionum, &c. *Quoniam ex hypothesi abscissa axis I B ad latus rectum B G erat vt abscissa K E ad latus rectum E H; & propter similitudinem sectionum* 12. huius. *latera erecta G B, & H E ad axes transuersos, & ideo ad eorum semisses T B & E X eandem proportionem habebunt; ergo ex æquali I B ad B T erit vt K E ad E X, & inuertendo T B ad B I erit vt X E ad E K. Sed libet aliam expositionem afferre Apollonij principijs conuenientiorẽ. Quia ex definitione 2. huius libri legitime interpretata, & sicuti cõstat ex 12. prop. huius. In sectionibus similibus non qualibet axium abscissæ ad conterminas potentiales habent eandem rationem; sed illæ tantummodo, quæ figuræ lateribus proportionales sunt: itaq; in sectionibus similibus A B, D E vt qualibet axium, abscissæ B I, E K ad conterminas potentiales I A, K D sint proportionales, necesse est, vt eadem I B, & E K lateribus figurarum B T, E X proportionales sint.*

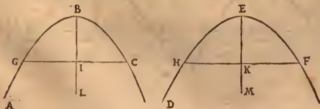


f Et quadratum V Z ad quadratum Z e est, vt quadratum a Y ad quadratum a f, &c. *Ostensa enim fuerunt duo triangula V Z e, & Y a f similia inter se; & ideo latera circa angulos rectos Z, & a proportionalia erunt; & pariter eorum quadrata.*

g Insuper dico non esse similia alicui alteri segmento, &c. *Sicuti in præcedenti propositione factum est ostendetur, quod segmentum N C non est simile alicui alio segmento in altera sectione P E, quando non comprehenduntur ab ordinatim ad axes applicatis, & in ellipsibus æqualiter à centris distant.*

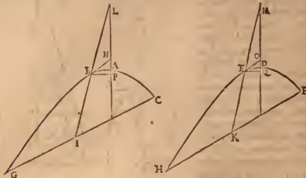
Notæ in Proposit. XXII.

ET propterea duo sectiones A B C, D E F similes erunt, &c. *Quoniam segmenta G B C, & H E F posita sunt similia, erunt diametrorum* Lem. 8. huius.



ex 11. 12. huius. *seu axium (in hoc casu) L B, & M E figuræ similes inter se; & ideò sectiones A B C, & D E F similes erunt.*

Itaque propter similitudinem duorum segmẽtorum simlia erunt B N L, E O M, & pariter L B P, & M E Q atque quadratum B P ad L P in P N nempe, &c. *Huius secundæ partis demonstrationem, quàm non sinceram Paraphrastes Arabicus nobis transmisit omittere operæ pretium erit, eandemq; bre-* b



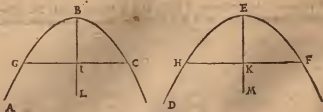
uius demonstrare hac ratione. Quia segmenta C B G, & F E H similia ponuntur; ergo erunt figuræ diametrorum B I, E K similes inter se in angulis I, K æqualibus, & sectiones ipsæ C B G, & F E H similes inter se erunt; quod est contra hypothesim.

Lem. 8. huius. Prop. 15. huius.

Notæ in Proposit. XXIII.

SI enim similia essent haberent conditiones similitudinis, quod est impossibile, &c. *Si enim concedantur segmenta G B C in parabola, & H E F in hyperbole, vel ellipsi, similia inter se; igitur in vnaquaque earũ duci possent ad diametros ordinatim applicata numero æquales, efficientes angulos æqua-* a

Defin. 7. huius.



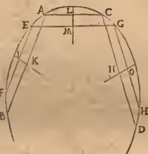
les

les cum diametris, quæ abscissis sint proportionales, & abscissæ quoque inter se. Vnde sequitur, quod portiones eiusdem diametri E K à centro M ad omnes ordinatim ad diametros applicatas sint æquales inter se; vt ostensum est in propositione 13. huius: quod est impossibile.

Quando verò sectio A C est hyperbole, ac sectio D F est ellipsis, similiter, vt in 14. propositione huius, ostendetur; quo abscissæ in hyperbola, & ellipsi sint proportionales; & propterea omnes habebunt rationes maioris inæqualitatis, aut omnes habebunt, proportiones inæqualitatis minoris, quod tamen in prædicta 14. propositione impossibile esse ostenditur.

Notæ in Proposit. XXIV.

a SI enim hoc verum non est, &c. *Quod qualibet portio B A D sectionis conicæ A B G nullo pacto circumferentia circuli esse possit sic ostendetur. Quia in circulo rectæ lineæ diuidentes bifariam duas parallelas inter se sunt necessariò diametri circuli, qui perpendiculariter secant prædictas parallelas applicatas; igitur si curua linea B G D fuerit circuli peripheria rectæ lineæ K I, L M, & N O diametri circuli, erunt perpendiculares ad ordinatim applicatas æquidistantes inter se; sed quia etiam A B G supponitur sectio conica, erunt K I, L M, N O, axes prædictæ sectionis conicæ eo quod bifariam, & ad angulos rectos diuidunt ordinatim applicatas. Rursus quia prædictæ ordinatim applicatæ non sunt omnes inter se parallelæ, eo quod ex constructione applicatæ A B, A C, C D non fuerunt ductæ æquidistantes; igitur tres axes I K, L M, N O indirectum non coincidunt; quare in sectione conica B A G reperiri possent tres axes; quod est impossibile.* 48. lib. 2.



SECTIO NONA

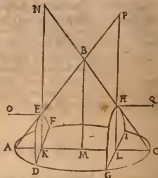
Continens Proposit. XXV.

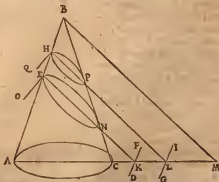
b SI duo plana æquidistantia conum aliquem secuerint, atque in eo efficiant duas hyperbolas, aut ellipses; vtique sectiones similes inter se erunt, sed non erunt necessariò æquales.

Efficiant

 b

Efficiant duo plana parallela D E N F, G H P I in basim coni A C duas rectas lineas D F, G I, & planum per axim coni ductum efficiat triangulum A B C perpendiculare ad duo illa plana parallela; quæ ab illo secentur in E K, H L. Erunt D F, I G perpendiculares ad A C, & educamus B M parallelam ipsis E K, H L; & vt quadratum B M ad A M in M C; ita ponatur N E ad E O, & ita P H fiat ad H Q, erunt
12. 13. lib. 1. N E, P H inclinata duarũ sectionũ F E D, I H G, aut eorum transuersæ; igitur O E, H Q erunt eorum
12. huius. erecta, & propterea figuræ duarum sectionũ sunt similes; igitur duæ sectio-





2. & 10. huius. nes similes sunt. Et si quidem fuerint N E, P H æquales; ipsæ quoque æquales erunt, alias non; Et hoc erat propositum.

Notæ in Proposit. XXV.

SI abscindant conum aliquem duo plana parallela prouenient duæ sectiones hyperbolicæ, vel quia duæ sectiones sunt similes, &c. *Quæ, immutanda censui vt in textu videre est.* a

Sint abscissiones duorum planorum æquidistantium cum basi I G, F D, & secet conum planum transiens per eius axim, &c. *Addidi verba, quæ in textu desiderantur, quæ expositionem perficiunt. Animaduertendum est, hanc propositionem conuertibilem non esse; licet enim plana parallela in eodem cono efficiant sectiones similes, verum non est, quod quotiescunque in eodem cono duæ sectionee* b

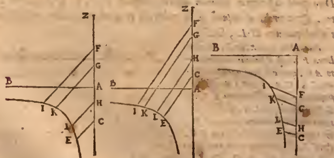
sectiones sunt æquales, vel similes inter se, tunc quidem earum plana sunt æquidistantia: Sicuti enim in eodem cono scaleno designari possunt circuli æquales subcontrariè positi, sic etiam reliquæ conisectiones subcontrariè constitutæ effici possunt æquales, & similes inter se: hæc autem, sicuti etiam quamplurima videri possunt in libris neotericorum.

Sed non alienum erit à nostro instituto hic paucis considerare passiones, & descriptiones sectionum conicarum similium, vel æqualium, quæ æquidistantes, seu asymptoticæ vocantur. Et licet hæ ab alijs inuentæ, & traditæ sint, non nullæ tamen noua in medium afferam: non enim rerum nouitas ex subiecti nouitate tantummodò arguitur, imo de subiecto antiquo possunt noua speculationes afferri, atque corrigi, & cõpleri ea, quæ apicem perfectionis non attingunt, & hæc quidem omnia noua dici poterunt, & possunt, & debent zelo veritatis euulgari, nec propterea prædecessorum nominibus, aut inuentionibus iniuria infertur.

Primus itaque omnium (quod sciam) Pappus Alexandrinus libro septimo collectionum Mathematicarum propositione 208. lemmate sexto in quintum librum Apollonij, considerauit concentricas hyperbolas inter se similes, eundẽ axim habentes, ad easdem partes cauas inter se se non concurrere, sed semper ad se ipsas vicinius accedere. Postea Gregorius à Santo Vincentio ostendit, quod duæ parabolæ inter se æquales, similiter positæ circa communem axim, vel diametrum, pariter nunquàm conueniunt, & parallelæ sunt inter se, & in infinitum productæ semper magis ad inuicem accedunt; atque proposit. 139. de Hyperbola considerauit duas hyperbolas æquales, & similes, quæ pariter in infinitũ extensæ nunquàm conueniunt, & simul cum Pappo putat, rite concludi posse, quod prædictæ sectiones, in infinitum extensæ, sint asymptoti, & semper magis, ac magis ad inuicem appropinquentur ex eo, quod rectæ lineæ inter se æquidistantes inter duas sectiones interceptæ, successiuè semper diminuantur. Propositiones quidem reconditæ, & scitu iucundæ, sed an æquè certæ, & indubitatæ censeri debeant, inquiremus, aliquibus tamen præmissis. Parab. pr. 344.

DEFINITIO Addita.

In qualibet hyperbola I E, cuius asymptoti C A B, duarum rectarum linea-

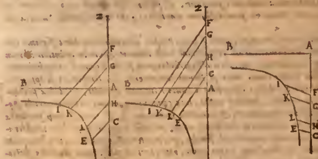


rum F I, G K inter se æquidistantium, ab vna asymptoto A C ad hyperbolen eductarum, sit F I propinquior centro, quàm G K, quando ambo cadunt infra centrum A ad partes C; vel F I magis à centro recedat, quando ambo cadunt

 vltra

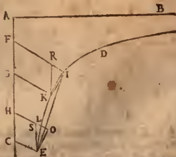
vltra centrum in eadem asymptoti productione A Z; aut F I supra, & G K infra centrum A existat: In quolibet casu dicetur, F I vlterius tendere ad partes centri, vel asymptoti A B, quàm G K.

Non secus si ab eadem asymptoto A C educantur quatuor rectæ lineæ inter se æquidistantes F I, G K, H L, C E, quarum duæ priores F I, G K, centro propinquiores sint, quando omnes infra centrum A collocantur; vel magis à centro recedant, quando omnes in productione A Z existunt; aut certe duæ F I, G K supra centrum, & H L, C E infra centrum existant: Tunc similiter in quolibet casu dicentur rectæ lineæ F I, G K vlterius tendere ad partes centri, & asymptoti A B, quàm duæ aliæ H L, C E.



PROP. 2. Addit.

Si in vna asymptoto A C, hyperboles D E sumantur duo segmenta æqualia F G, H C, & à punctis diuisionum ducantur quatuor rectæ lineæ F I, G K, H L, C E parallelæ inter se, vsque ad hyperbolen: Dico quod differentia duarum æquidistantium F I, G K ad partes centri, & alterius asymptoti A B vlterius tendentium, maior erit differentia reliquarum H L, C E.



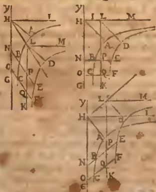
Ducantur à punctis E, K rectæ lineæ E S, K R parallelæ asymptoto A C, quæ efficiant parallelogrāma C S, G R. Patet I R esse differentiam æquidistantium F I, & G K; pariterque L S esse differentiam æquidistantium H L, C E; & coniungantur rectæ lineæ E I, & K I, ducaturque E O parallela I K, secans H L in Q. Et quia recta linea E I cadit intra curuam sectionem conicam E K I, & punctum K eiusdem conicæ sectionis inter

inter E, & I existit; ergo recta linea I K posita intra conicũ segmentum E K I supra eius basim E I eadit; & ideo ei parallela E O cadit infra eandem segmenti conici basim E I, & propterea occurret ipsi H L intra consectionem, & infra punctum L in sectione positum, vt in O; & ideo O S maior erit, quàm S L. Et quoniam S E, & R K sunt inter se parallela (quia eidem A C aquidistant) pariterque E O, & K I facta sunt parallela, atque S O, & R I (ex hypothesi) aquidistantes erant; igitur duo triangula E S O, & K R I similia sunt inter se, & eorũ latera homologa E S, & K R aqualia sunt inter se (quia in parallelogrãmis C S, & G R latera E S, R K aqualia sunt oppositis C H, G F inter se aqualibus, ex hypothesi) igitur reliqua latera homologa S O, & R I aqualia sunt inter se; & propterea R I differentia aquidistantium F I, G K ad partes centri A, & asymptoti A B vlterius tendentium, maior erit, quàm S L, qua portio est ipsius S O, & est differentia aquidistantium H L, & C E alterius segmenti H C. Quod erat ostendendum.

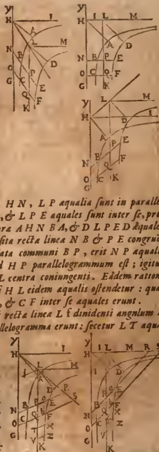
Ex constructione, & demonstratione huius propositionis colligitur, quod si à duobus punctis eiusdem asymptoti A C ad hyperbolen ducantur dua recta linea inter se parallela; illa, qua ad partes centri A, & asymptoti A B vlterius tendit, maior est reliqua. Nam recta linea K R, asymptoto A C parallela cadit extra sectionem, & ideo secat interceptam parallelam F I, qua erit maior, quàm F R, seu G K; igitur F I ad partes centri A vlterius tendens maior est qualibet alia parallela G K ad partes oppositas tendente. Eadem ratione F I maior erit quàm H L, & H L maior, quàm C E. Vnde patet propositum. COROL LAR.

Si fuerint duæ hyperbolæ A B, & D E æquales, & similes ad easdem partes cauæ, quarum centra H, & L, & asymptoti G H I, & K L M, nec non axes A H, & D L sint parallelæ inter se, & rectæ lineæ B E, & C F ab hyperbolis interceptæ parallelæ fuerint rectæ H L centra coniungenti; erunt B E, & C F æquales ipsi H L, & inter se. PROP. 3. Addit.

Si autem parallelæ sint alicui rectæ lineæ L f diuidenti angulum K L H contentum à recta linea L H centra coniungente, & interiore asymptoto L K, in qua B E, & C F positæ sunt: Dico B E vlterius tendentem ad partes reliquæ asymptoti L M maiorem esse, quàm C F.



Si vero B E, & C F parallelæ sint alicui rectæ lineæ H g diuidenti angulum L H G à recta linea L H centra coniungente, & eadem asymptoto H G contentum: Dico B E vlterius tendentẽ ad partes reliquæ asymptoti H I minorem esse, quàm C F.



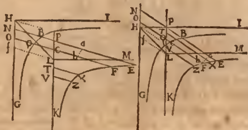
Rectæ lineæ parallelæ B E, C F secent æquidistantes asymptotos H G, L K in punctis N, O, P, Q. Debent autem conisectiones in eodem plano collocari sicuti aliæ omnes, quæ in sequentibus propositionibus 4. 5. 6. 7. 8. & 9. vsurpantur semper in vno plano positæ intelligi debent.

Et primo duæ rectæ B E, C F parallelæ sint rectæ lineæ H L centra coniungenti. Quoniam hyperbolæ A B, D E æquales sunt, & congruentes; atque æquidistantes asymptoti H N, L P æque inclinantur ad æquales semiaxes transuersos H A, & L D; & segmenta asymptotorum H N, L P æqualia sunt in parallelogrammo H P, nec non duo anguli H N B, & L P E æquales sunt inter se, propter parallelas asymptotos: igitur duæ figuræ A H N B A, & D L P E D æquales erunt, & congruentes: quapropter interposita recta linea N B & P E congruẽtes, & æquales erunt; & addita vel ablata communi B P, erit N P æqualis B E: est verò N P æqualis H L, eo quod H P parallelogrammum est; igitur intercepta B E æqualis est rectæ lineæ H L centra coniungenti. Eâdem ratione qualibet alia intercepta C F parallela ipsi H L eidem æqualis ostendetur: quapropter duæ interceptæ æquidistantes B E, & C F inter se æquales erunt.

Secundo B E, C F parallelæ sint alicui rectæ lineæ L f diuidenti angulum K L H; ideoque P L f N, & Q L f O parallelogramma erunt: secetur L T æqualis H N, atque L V æqualis H O; ducanturque T X, V Z parallelæ ipsis N B, O C secantes reliquam hyperbolen in X, Z; eritque (vt in prima parte ostensum est) T X æqualis N B, atque V Z æqualis O C. Et siquidem B E, C F cadunt infra centra H, L ad partes G, K, cadent quoque infra L f eis parallelam per L ductam infra centrum H incidentem, & ideo N f, seu ei æqualis P L in parallelogrãmo P f minor erit, quàm H N; estque L T æqualis H N; igitur L P minor erit, quàm L T; & propterea punctum P propinquius erit centro L, quàm T: Eadem ratione ostendetur, quod punctum Q propinquius sit centro L, quàm V, & P propinquius centro quàm Q; ergo quatuor æquidistantium P E, Q F, T X, V Z cadentium infra centrum ad partes K, duæ P E, T X vlterius ad partes centri, vel asymptoti L M tendunt, quàm duæ Q F, V Z. At si B E, C F secent rectã lineam centra coniungentem inter duo centra H, & L, manifestum est puncta P, & Q cadere supra centrum L, atque duo puncta N, & O cadere infra centrum H alterius hyperboles, cumque L T secta sit æqualis ipsi H N ad easdem partes; pariterque L V æqualis ipsi

Def. add.

H O cadent puncta T, & V infra centrum L; & P vlterius tendit quàm Q ad partes eiusdem centri L. igitur in tali casu quatuor æquidistantium duæ P E, T X vlterius tendent ad partes centri, & asymptoti L M, quàm duæ aliæ æquidistantes Q F, V Z. Quando verò B E, & C F cadunt vltra centra H, & L in productionibus æquidistantium asymptotorum G H, K L: quia N P cadit Def. add.

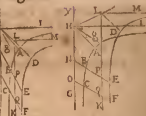


supra, & L f infra centrũ H, ergo in parallelogrammo P f recta N f, seu ei æqualis L P maior erit quàm N H: facta autem fuit L T æqualis H N; igitur L T minor est, quàm L P; Eadem ratione L V minor erit, quàm L Q, atque P vlterius tendit quàm Q ad partes centri L, & ab ijsdem punctis cadentibus supra centrum L in productione asymptoti K L ducuntur quatuor rectæ lineæ inter se æquidistantes vsque ad hyperbolen D Z; igitur duæ P E, T X vlterius tendunt ad partes centri, vel asymptoti L M, quàm duæ Q F, V Z. Ibidem. *Secetur postea P a æqualis N B., atque Q b æqualis O C. Et quia T X æqualis ostensa fuit N B erit P a æqualis ipsi T X; estque P E maior quàm T X; propterea quod illa vlterius tendit ad partes cẽtri L, quàm T X; igitur P E maior erit, quàm P a, & earum differentia erit E a.* Coroll. Propof. 2. addit. *Simili modo ostendetur Q b æqualis V Z, & minor quàm Q F, quarum differentia F b: cumque Q P æqualis sit ipsi N O, propterea quod sunt latera opposita eiusdem parallelogrammi; igitur T V, quæ ostensa fuit æqualis O N erit quoque æqualis Q P, & sumpta communiter Q T erit Q V æqualis T P, atque à terminis æqualium segmentorum eiusdem asymptoti L K ducuntur vsque ad hyperbolen E Z quatuor rectæ lineæ inter se æquidistantes, & earum binæ P E, T X vlterius tendunt ad partes centri, & asymptoti L M, quàm binæ Q F, V Z; igitur differentia priorum, scilicet E a maior erit posteriorum differentia F b;* Propof. 2. addit. *estque B a æqualis N P, propterea quod æqualibus N B, & P a ponitur communiter B P; pariterque O Q æqualis est C b; suntque N P, & O Q æquales inter se, nempe latera opposita eiusdem parallelogrammi; igitur B a, & C b æquales sunt inter se: ijs verò adduntur excessus inæquales E a, F b efficietur E B vlterius tendens ad partes asymptoti H I maior, quàm F C. Quod erat primum.*

Tertio ijsdem positis N E, O F sint parallelæ alicui rectæ lineæ H g diuidẽti angulum L H G, & propterea extensæ productionem asymptoti M L secabunt,

&

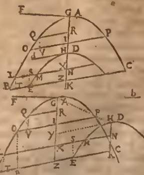
& parallelæ erunt alicui rectæ lineæ ex L Y diuidenti angulum H L M, eo quod parallelæ erãt rectæ H g diuidenti angulum L H G, & prius B E vlterius, quàm C F tendebat ad partes asymptoti H I; ergo è contra C F vlterius tendet ad partes asymptoti H G, & educũtur ab asymptoto L M producta, & parallelæ sunt rectæ lineæ ex L diuidenti angulũ H L M, contentum à recta linea centra coniungente, & asymptoto M L, in qua illa cadunt; igitur (ex prima parte huius propositionis) C F maior erit, quàm B E; & è contra B E vlterius tendens ad partes asymptoti H I, minor erit, quã C F; vt propositum fuerat.



PROP.4. Addit. *Sint duæ æquales parabolæ A B, D E ad easdem partes cauæ, quarum diametri G I, H K sint congruentes aut parallelæ inter se, nec nõ ad eas ordinatim applicatæ B Z K, L X N sint parallelæ alicui rectæ diuidenti angulum G H K à recta linea G H vertices coniungenti, & diametro H K interioris sectionis D H contentum, si diametri congruentes non fuerint. Dico quod, B E, L M portiones applicatarum à sectionibus ad easdem partes interceptæ, semper magis diminuentur, quo magis à verticibus recedunt; efficienturque minores quacumque recta linea proposita, si diametri sunt congruentes: si verò sunt parallelæ nunquam minores erunt portione ordinatæ inter diametros intercepta. At si parallelæ fuerint alicui rectæ lineæ diuidenti angulum H G I à recta G H, & diametro I G exterioris sectionis A G contentum, semper magis augentur, sed erunt semper minores ea quæ à diametris intercipitur. Vel si fuerint parallelæ diametris non congruentibus, semper magis augentur, quo magis à concursu recedunt.*

Sit F G latus rectum diametri G I in parabola G B, ordinatim applicatæ B E K, & L M N secent diametrum G I in X, Z, & diametrum H K in N, K, & secetur abscissa G I æqualis H K, & G R æqualis H N; ideoque R I æqualis erit N K, seu X Z (propterea quod in parallelogrammo N Z opposita latera æqualia sunt) ducanturque ordinatæ O I, Q R, quæ erunt æquales, & congruentes ipsis E K, M N propter æqualitatem sectionum, & abscissarũ similium diametrorum; ducanturque à punctis E, L, Q rectæ lineæ E S, L T, Q V parallelæ diametris occurrentes ipsis B E, & O I in S, T, V: manifestum est S M

ex 10. ex 21. huius.



aqua-

æqualem esse O V, eo quod in parallelogrammis Q I, & S K latera opposita sunt æqualia, & ipsæ ordinatæ E K O I; nec non M N, Q R æquales ostensa sunt: Deinde producantur, B E, O I ad sectionem in C, P; Et quia differentia quadratorum B Z, L X, seu T Z, idest rectangulum B T C æquale est differentiæ rectangulorum Z G F, & X G F seu rectangulo sub abscissarum differentia X Z, & latere recto G F. Simili modo rectangulum O V P æquale erit rectangulo sub abscissarum differentia R I, & latere recto G F: suntque rectangula contenta sub X Z, G F, & sub R I, G F æqualia, propterea quod latera X Z, R I æqualia ostensa sunt, & latus rectum G F est commune; igitur rectangula B T C, & O V P æqualia sunt; ideoque vt T C ad V P, ita reciprocè erit O V ad B T. ex 11. lib. 1.

Et primò quia diametri G Z, H K coincidunt, & parabola H D comprahenditur ab A G: erit G Z maior quàm H K, seu quàm G I, & B Z maior quàm E K, & L X quàm M N. Si verò B E, L M parallelæ sunt alicui rectæ lineæ H Y diuidenti angulum G H K; ergo Y Z, seu ei æqualis H K, vel G I minor erit, quàm G Z. Eadem ratione G X maior erit, quàm G R; quare ordinatim applicata B Z maior erit, quàm O I, & Z C maior, quàm I P; pariterque L X, seu T Z maior erit, quàm Q R, seu K I; ideoque T C maior erit, quàm V P: erat autem O V ad B T reciprocè, vt T C ad V P; ergo O V, seu ei æqualis S M maior erit, quàm B T: ijs verò addantur æquales L S, T E, quæ in parallelogrammo S T sunt latera opposita, igitur L M, maior erit quàm B E.

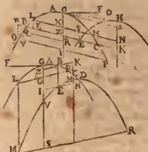
Deinde quando diametri G I, H K sibi mutuo congruunt sit b minor qualibet data recta linea, & à vertice H ducatur H d cuius quadratũ æquale sit rectangulo H G F, & fiat vt b ad H d, ita H d ad aliam rectam lineam æqualem C E; atq; vt H d ad semissem sũmæ C E, & b potentia, ita fiat longitudine H G ad G K, ducaturque B K C ordinatim applicata ad diametrum G I. Quoniam quadratum E K æquale est parallelogrammo H K, G F (propterea quod parabolæ sunt æquales, & diametri similes) & ijs adduntur inter se æqualia quadratum d H, & rectangulum H G F, erunt duo quadrata E K, & d H simul sumpta æqualia rectãgulo K G F, seu quadrato B Z; quare differentia quadratorũ B K, & E K, idest rectanguli B E C æqualis erit quadrato d H; & propterea d H media proportionalis est inter C E, B E, sed facta fuit media proportionalis inter C E, & b; Ergo B E æqualis est b; ideoque B E minor est qualibet recta linea data. 11. lib. 1.

Quando verò diametri G Z, H K sunt æquidistantes, ijsdem positis ducatur O n parallela diametris secans B E in n. Quia n Z est æqualis O I. & erat E K æqualis O I, ergo n Z, & E K æquales sunt, & addita, vel ablata communi Z E erit n E æqualis Z K; & propterea qualibet intercepta B E maior erit in secundo casu, & minor in tertio, quàm n E, seu Z K à diametris comprahensa.

Tertio quando B E, L M parallelæ sunt alicui rectæ G a diuidenti angulum H G I, erit K a, seu ei æqualis G Z minor, quàm H K, seu quàm G I, atq; vt prius rectangula B T C, & O V P æqualia erunt, & eorum latera reciprocè proportionalia, estque S M æqualis minori O V, ergo S M minor erit quàm B T; & additis æqualibus L S, & T E, erit L M minor quàm B E.

Tandem sint interceptæ B E, L M parallelæ G V, H C portionibus interceptarum diametrorum non congruentium, & à terminis B, E, L, M, ducantur ad diametros ordinatim applicatæ, eas secantes in Z, K, I, N, O, S, & sectiones in P, & R; & cadat B E inter duas diametros. Quoniam punctum

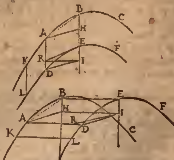
B cadit



B cadit inter verticem G, & punctum C eiusdem parabolæ G C; igitur Z B K ordinatim applicata ad diametrum G I necessario secabit diametrum G I intra sectionem in Z, & producta occurret K N extra eandem in K. Non secus ostendetur, quod E N I ordinatim applicata ad diametrum H N, punctum N cadit intra, & I extra eandem sectionem H E, & propterea recta C H minor erit, quàm K N, seu B E ei aequalis in parallelogrammo E K; pariterque Z I, seu ei aequalis B E minor erit, quàm G V. Cadat postea L M extra duas diametros ad easdem partes. Quoniam in parallelogrammo L S latera L O, M S aequalia sunt; estque S R maior quàm M S, seu quàm O L; ergo (vt in prima parte huius propositionis ostensum est) rectangulum M S R, seu rectangulum sub S V, 11. lib. 1. *& latere recto G F maius erit quadrato L O, seu rectangulo O G F, & propterea S V maior erit, quàm O G, & addita communi O V; erit O S, seu ei aequalis L M, in parallelogrammo L S, maior quàm G V. Quod erat ostendendum.*

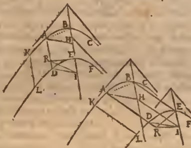
SCHOLIVM. *Idem omnino verificari in ellipsibus demonstrari facile posset, quod breuitati studens libens omitto.*

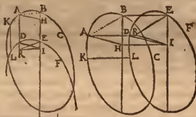
PROP. 5. Addit. *Si fuerint duæ quælibet conisectiones A B C, D E F æquales, & similes ad easdemque partes cauæ, quarum diametri B H, E I (æquè inclinatæ ad ordinatim ad eas applicatas) æquidistantes sint inter se, vel congruentes; & ducantur quælibet rectæ lineæ A D, K L à sectionibus interceptæ, parallelæ rectæ lineæ B E vertices coniungenti: erunt illæ æquales inter se.*



Si enim hoc verum non est, sit A D si fieri potest maior, aut minor, quàm B E, & secetur A R aequalis B E: patet punctum R cadere intra, aut extra sectionem D E (sed in eius plano cum sectiones in eodem plano existant) iunganturque rectæ lineæ A B, E R, quæ aequales erunt, & parallelæ inter se, cum sint coniungentes aequalium, & aequidistantium B E, & A R. Postea ducatur A H ordinatim applicata ad diametrum B H efficiens abscissam H B; seceturque abscissa E I in altera sectione aequalis B H; iunganturque H I, I D, & I R. Et quoniam B H, E I

E I sunt æquales, & parallelæ; ergo H I æqualis erit, & parallela ipsi B E (vel quia additur communis H E, vel propter parallelogrammum B I) sed prius A R æqualis erat, & parallela eidem B E; igitur A R, & H I æquales sunt inter se, & æquidistantes; ideoque coniungentes A H, R I erunt æquales, & parallelæ; suntque anguli A H B, & R I E æquales inter se, cum ab æqualibus lateribus in triangulis A B H, & R E I æquilateris inter se contineantur; ergo R I ordinatim quoque applicata est ad diametrum E I; atque in sectionibus æqualibus abscissæ B H, E I diametrorum similium, scilicet æque inclinatarum ad suas ordinatas æquales sunt inter se; nec non ordinatæ A H, I R æquales sunt ostensæ; igitur sicut punctum A in sectione A B cadit, ita punctum R in sectione E D existit; sed positus fuit intra, aut extra ipsam, quod est absurdum: Non igitur recta linea A D maior, aut minor esse potest, quàm B E; ideoque ei qualibet alia intercepta K L æqualis omnino erit. Simili ratiocinio ostendetur æquidistans ipsi B E eidem æqualis; quapropter interceptæ A D, K L, & B E æquales erunt inter se: Quod erat ostendendum. ex 10. huius.

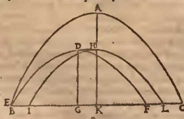




SCHOLIUM.

Si duæ parabolæ B A C, F D E æquales ad easdem partes cauæ, constitutæ fuerint circa axes A K, D G æquidistantes, & non congruentes se mutuo secabunt.

Ex vertice D axis G D ducatur D H perpendicularis ad axim A K, eum secans in H, & describatur alia parabola I H L æqualis prioribus B A, vel E D, cuius axis sit K H, & vertex H, & sicuti in propositione 4. additarum factum est, reperiatur B F C ordinatim ad axes applicata secans parabolas in E, B, I, & axes in G, K, ita vt intercepta B I æqualis sit D H, seu G K, quæ in parallelogrammo D K ei æqualis est. Quoniã parabolæ E D, & I H æqua-



ex prop. 1. huius. *les ſunt, & axium abſciſſæ D G, H K æquales cum ſint latera oppoſita parallelogrammi D K; ergo ordinatim ad axes applicatæ E G, & I K æquales ſunt, & ablata communi I G, erit E I æqualis G K, ſeu D H; erat autem intercepta B I æqualis eidem D H; igitur B I erit æqualis E I; & propterea punctum E* Maurol. 27. lib. 5. Conic. *parabolæ E D F cadet ſuper punctum B parabolæ B A C; ergo duæ parabolæ B A C, & E D F conueniunt in vno puncto, & in eo ſe mutuo tangere non poſſunt; igitur ſe mutuo ſecant. Quare patet propoſitum.*

His demonſtratis manifeſtè percipitur, quod ex ſucceſſiua diminutione rectarũ æquidiſtantium, inter coniſectiones interceptarum, deduci non poteſt, coniſectiones magis ad ſe ipſas propius accedere; propterea quod in iiſdem ſectionibus aſymptoticis duci poſſunt interceptæ rectæ lineæ inter ſe æquidiſtantes, quæ ſint omnes æquales inter ſe, nimirum illæ, quæ parallelæ ſunt alicui communi diametro, vel rectæ lineæ vertices earum coniungenti, vt in propoſitione 5. additarũ oſtenſum eſt. Similiter aliæ interceptæ rectæ lineæ, inter ſe æquidiſtantes ſucceſſiuè augentur aliæ verò ſucceſſiuè diminuuntur verſus eaſdem partes, vt in propoſitione 3. & 4. addit. oſtenſum eſt. Et hoc nedũ verificatur in ſectionibus non congruentibus, & aſymptoticis, ſed etiã in duabus æqualibus, & inter ſe ſimilibus ſectionibus ſe mutuo ſecantibus, dummodo earum axes paralleli ſint, in iis enim interceptæ rectæ lineæ inter ſe æquidiſtantes, tendentes ad eaſdem partes, etiam illæ, quæ propius ad punctum occurſus ſectionum conicarum accedunt, poſſunt diminui, pariterque inter ſe æquales eſſe, & quod mirum eſt poſſunt ſemper magis augeri. Si igitur æquidiſtantes interceptæ ſunt menſura diſtantiarũ duarum ſectionum, eædem coniſectiones cenſeri debent modo parallelæ, & æqualibus interuallis inter ſe diſtantes, modo ad eaſdem partes ſtringi, & coanguſtari, & ſimul dilatari magis, ac magis, quod omnino videtur abſurdum. Non igitur ex eo quod omnes interceptæ rectæ lineæ inter ſe æquidiſtantes ſunt æquales inter ſe; propterea ſectiones ipſæ erunt parallelæ, & aſymptoticæ, & ſemper æquali interuallo ad inuicem ſeparatæ; neque ex eo quod prædictæ parallelæ magis augẽtur, vel diminuuntur interualla augeri, vel ſtringi cenſendum eſt.

Et præcipuè præſtantiſſimus Gregorius à Sancto Vincentio neſcio an iure demonſtrationem propoſitionis 14. libri 2. ipſiuſmet Apollonij inſufficientem reputauerit, propterea quod Apollonius deduxit rectas lineas hyperbolen comprahendẽtes, quæ aſymptoti vocantur ſemper magis, ac magis ſectioni viciniores fieri ex eo quod rectæ lineæ inter ſe æquidiſtãtes, interceptæ inter rectas aſymptotos vocatas, & hyperbolen contentam ſucceſſiuè ſemper magis, ac magis diminuantur; & è contra aſſeruit cum Cardano, & quodam Rabino Moſe diſtantiam hyperbolæ à rectis aſymptotis ſumi debere, non à quibuſcunque rectis lineis interceptis inter ſe parallelis, ſed tantummodo à rectis lineis perpendicularibus ad aſymptotos, quæ ſolummodo, inquiunt ipſi, diſtantias determinant; at reuera hæc animaduerſio non videtur neceſſaria: perinde enim eſt conſiderare rectas lineas ab hyperbole ad vnam rectam lineam continentium ductas, quæ efficiat cum illa angulos æquales, ac ſi perpendiculares eſſent ad eandem: at quando rectæ lineæ interceptæ ſunt inter ſe æquidiſtantes, tunc omnes efficiunt ſuper rectam lineam continentem hyperbolen angulos æquales ad eaſdem partes; & propterea (ex inæqualitate prædictarum æquidiſtantium) optimè concluditur cum Apollonio inæqualitas perpendicularium, ſeu diſtantiarum. Quando verò conſiderantur duæ lineæ curuæ veluti ſunt duæ parabolæ, vel duæ hyperbolæ, vel ellipſes, tunc qui-

dem

dem nulla ratione rectæ lineæ inter se æquidistantes, inter curuas interceptæ determinare possunt prædictarum curuarum distantias; quandoquidem inæqualiter semper inclinantur ad quamlibet prædictarum curuarum, & rectæ lineæ interceptæ, quæ sunt perpendiculares ad vnam ipsarum, non erunt inter se æquidistantes. Et quia, vt dictum est, prædictæ perpendiculares sunt distantiarum legitimæ mensura, nunquàm concludi potest certo, quod prædictæ sectiones sint æquidistantes. vel sibi ipsis successiuè viciniores fiant, nisi considerentur rectæ lineæ interceptæ ad vnam sectionum perpendiculares: quod quidem hucusque quòd sciam factum non est, neque forsan huiusmodi speculatio inuentu facilis erit, aut iniucunda.

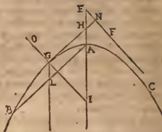
In parabola, vel hyperbola A B C ad eius axim E A I ducere ramum breuissimum æquidistantem alicui rectæ lineæ E F, quæ oportet, vt efficiat cum axi ad partes sectionis angulum A E F acutum, sed in hyperbola sit minor semisse vnius recti, & angulus F E X ab vna asymptoto, & recta linea E F contentus sit acutus. PROP. 6. Addit.

Fiat angulus A E D æqualis angulo A E F, & ex vertice A ducatur recta linea A B efficiens angulum I A B, qui simul cum angulo A E F vnum rectum angulũ compleat; sed in hyperbola, quia vterq; angulus X E A, & A E F deficit à semirecto erũt ambo minores summa præcedentium, scilicet vno angulo recto; ergo ablato cõmuni angulo A E F, erit angulus I A B maior angulo A E X. Postea, quia tam A E F, quàm A E D minor est semisse vnius anguli recti, & A E F cum angulo I A B vnum rectum angulum complent; ergo angulus I A B maior erit angulo D E A; & propterea recta linea A B producta necessario secabit vtramque rectam lineam E D, & E X asymptotum extra sectionem cadentem ad partes D, X; ideoque A B hyperbolen secabit in aliquo alio puncto B. In parabola verò, quia recta linea A B axim secat in vertice A non ad angulos rectos (cum anguli I A B, & A E F rectum compleant) ergo A B sectioni occurrit in duobus punctis. Secetur iam A B bifariam in L, & per L ducatur diameter sectionis L G sectioni occurrens in G, & per G ducatur contingens G H, seu parallela A B secans axim in H, & per G ducatur I G O perpendicularis ad G H. Dico I G problema efficere. Quoniam pro-

17. 27. lib. 1.

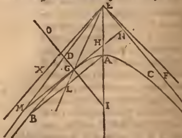
35. 36. lib. 1. 5. lib. 2.

pter parallelas G H, B A, est angulus G H A, seu E H N æqualis angulo B A I; sed anguli B A I, & A E F vnicum rectum complent; ergo duo anguli N H E, & N E H simul sumpti vni recto æquales sunt, & propterea in triangulo E N H reliquus angulus N rectus erit: erat quoque angulus
31. lib. 5. *I G H rectus; igitur I G (qui est ramus breuissimus cum sit perpendicularis ad tangentem G H) est æquidistans recta linea E F; quod erat propositum.*



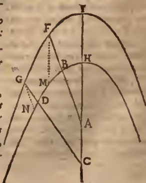
SCHOLIVM. *Facile deducitur, quod si angulus A E F fuerit rectus in parabola, & non fuerit semirecto minor in hyperbole facta eadem constructione quilibet ramus breuissimus I G æquidistans erit rectæ lineæ diuidenti angulũ A E F.*

Nam angulus A I G ab axi, & ramo breuissimo contentus est acutus, sed an-
13.14.15. lib. 5. *gulus F E A in parabola est rectus; ergo recta linea I G parallela est alicui recta linea diuidenti angulum A E F, in hyperbola verò factus est angulus A E D æqualis angulo A E F, qui semirecto minor non est; propterea erit totus angulus D E F rectus, aut obtusus; ergo in triangulo E M N externus angulus F N M maior interno, & opposito angulo E recto,*
31. lib. 5. *vel obtuso, erit quoque obtusus, & angulus I G N rectus est; igitur I G, F N se vicissim secabunt vltra punctum E, & ideo I G parallela erit rectæ lineæ diuidenti angulum A E F. Quod erat ostendendum.*



PROP. 7. Addit. *Sint duæ parabolæ, vel duæ hyperbolæ æquales, & similiter positæ H B D, & I F G circa communem axim A H I: intercepta axis portio erit distantia sectionum omnium maxima, & ei propinquior remotiore maior erit.*

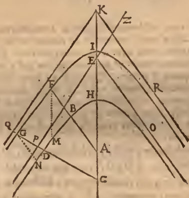
Sint centra E, & K, asymptoti P E O, Q K R, & à vertice H, & à quibuslibet
8.9.10.30. lib. 5. *punctis interiores sectionis B D educantur lineæ breuissimæ, seu perpendiculares ad rectas curuam B D contingentes in eisdem punctis, quæ sint H A, B A, & D C, quæ secent reliquam sectionem in punctis I, F, & G.*



Manife-

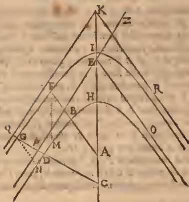
Manifestum est intereeptas I H, F B, G D esse minimas linearum rectarum, quæ à punctis I, F, G ad sectionem B D duci possunt; & ideo eadem intercepta erunt distantia quorunlibet punctorum sectionis I F G à sectione B D: & propterea erunt distantiæ prædictarum curuarum. Ostendendum modo est H I maiorem esse, quàm B F, & B F maiorem, quàm D G, & sic semper. Ducatur à puncto F intercepta recta linea F M parallela axi I H, atque à puncto G ducatur recta linea G N parallela ipsi F B, quæ occurrant sectioni B D in M, N. Et quoniam F M æquidistat vertices coniungenti I H, erit intercepta F M æqualis I H, sed cum ramus B A sit breuissimus, & eius portio F B erit quoque breuissima omnium, quæ ex puncto F ad eandem sectionem B H duci possunt; quare B F minor erit quàm F M, & F M ostensa fuit æqualis I H; igitur distantia intercepta F B minor erit quàm I H. 38.lib.5. 5.addit. huus. 38.lib.5.

Secundò quia duæ intercepta B F, N G parallelæ inter se productæ occurrunt axi intra sectiones ad partes A C, & in parabola, quàm secabunt in binis punctis, erunt saltem ordinatim applicatæ ad aliquàm diametrum: in hyperbolis verò 27.lib.1.



parallelæ erunt recta linea diuidenti angulum P E K à recta linea E K centra coniungente, & E P interiore asymptoto contentum; propterea tam in parabolis, quàm in hyperbolis intercepta B F, quæ vlterius tendit ad partes reliquæ asymptoti E O maior erit intercepta N G; sed quia G D est linea breuissima omnium, quæ ad sectionem H D duci possunt, cum sit portio breuissimæ D C, quæ perpendicularis est ad rectam contingentem in D, igitur G D minor erit, quàm G N; estque G N ostensa minor, quàm F B; ergo G D minor erit, quàm F B. 3.&4. addit. 38.lib.5.

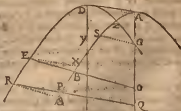
In parabolis autem, quia duci potest aliqua recta linea, vt N G parallela cuilibet intercepta B F; itaut sit N G minor quacunque recta linea data (quando nimirum ad aliquam diametrum ordinatim sunt applicatæ, scilicet, quando vna ipsarum, puta B F occurrat axi intra sectiones; quod quidem necessario eueniet, quando B A est ramus breuissimus) estque ramus breuissimus D G minor Prop.4. addit. 27.lib.1.



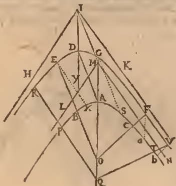
nor eadem G N ; igitur distantia sectionum G D minor erit, quæcunque recta linea proposita. Quia verò (vt constat ex demonstratione casus 2. propos. 3. addit. huius) qualibet recta linea G D intercepta inter hyperbolas conueniens cum axi intra sectiones maior est portione eiusdem rectæ lineæ C D G inter æquidistantes asymptotos E P, & K Q intercepta ; igitur internallum inter duas hyperbolas, licet successiuè semper magis, ac magis diminuatur, nunquàm tamen minor effici poterit internallo duarum æquidistantium hyperbolas continentium E P, & K Q; Quod quidem est perpendiculare ad vtramque rectam continentem E P, & K Q; estque prædicta perpendicularis minima omnium interceptarum inter eas.

PROP. 8. Addit. *Duarum parabolarum, vel hyperbolarum A B, D E æqualium, & similium, quarum axes A O, D Y, nec non asymptoti H I K, L M N sint parallelæ inter se, & similiter positæ: Sectionum distantia maxima parallela erit vertices coniungenti, & ei propinquiores ex vtraq; parte maiores sunt remotioribus vsq; ad concursum: si verò distantiam maximam non habent semper augentur quo magis à concursu recedunt.*

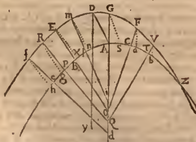
Cadat concursus sectionum Z inter axes A G, & D Y, & asymptoti I K, M N coincidant, aut sibi sint viciniores, quàm I H, M L. Et primò angulus Y D A ab axe Y D, & D A vertices coniungente contentus semirecto minor non sit in hyperbola, sitque rectus in parabola, & vltra concursum Z, ad partes axis D Y, & asymptotorum magis dissitorum H I, L M: sumantur in comprehensa sectione A B quælibet puncta, B, P, à quibus ad axim



ad axim ducantur rami breuissimi O B, Q P prater axim A O, & secent externam curuam in G, E, R, & occursui Z, vel communi asymptoto I M N, 8.9. & 10. lib. 5.

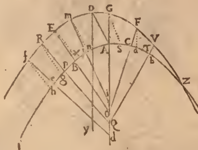


aut vicinioribus asymptotis I K; M N sit A G propinquior, quàm E B, & E B propinquior, quàm R P: Ostendendum est curuarum distantiam A G minorem esse, quàm B E, & B E, quàm P R. Ducantur intercepta G S parallela E B, & E X parallela R P. Et quia in parabola angulus T D A rectus supponitur, & in hyperbola non est minor semirecto, ergo quilibet ramus breuissimus E B, vel R P aquidistans erit recta linea diuidenti angulum A D T in parabola, & angulum M I H in hyperbola; sed duarum parallelarum E B, G S, vel R P, E X est G S vertici propinquior, vel vlterius tendit ad partes asymptoti I K, quàm E B; ergo G S minor est, quàm E B; estque G A minor, quàm G S, quia illa est portio, vel productio linea breuissima O A; igitur G A adhuc minor erit SCHOLIVM. Prop. 6. addit. Prop. 3.4. addit. 7. & 38. lib. 5.



quàm E B. Eadem ratione E B minor ostendetur, quàm R P. Postea, si occursus Z cadit extra duos axes, inter axim A O, & occursum aut ad partes asymptotorum

proterum coincidentium, vel propinquiorum, ad oppositas partes citra axim G A, sumantur duo puncta C, T, & ab eis ducantur ad axim rami breuissimi O C, Q T secantes externam sectionem in F, V, & ab occursu, vel communi asymptoto, vel ab asymptotis vicinioribus I K, M N magis recedat A G, quàm C F, & C F, quàm T V; Dico G A maiorem esse, quàm C F, & C F maiorem, quàm T V. Ducantur intercepta F a *parallela G A, & V* b *parallela C F.*

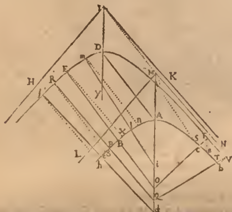


Poſtr. pars pt. 4 add. huius. Pars 3. prop. 3. addit. huius. 38. lib. 5. *Et quia in parabola F* a *propinquior est occursui sectionum, & parallela est diametro G A; at in hyperbola F* a *parallela est axi G A, vel D T diuidenti angulum M I H, & F* a *vlterius tendit ad partes asymptoti I K, quàm G A; ergo F* a *minor est, quàm G A: estque C F productio rami breuissimi minor quàm F* à*; ergo A G maior erit, quàm C F. Eodem ratiocinio ostendetur C F maior, quàm T V.*

Secundò angulus T D A sit acutus in parabolis, at in hyperbolis minor semirecto, & M I H ab asymptoto I H, & recta linea centra coniungente contentus sit acutus: Manifestum est duci posse ramum breuissimum, vt O B ad sectionem interiorem A B, qui parallelus sit recta linea D A vertices coniungenti, Propoſ. 6. addit. huius. *vel I M centra coniungenti; & ex vtraque parte ipsius rami O B prater axim* 8. 9. & 10. lib. 5. *A G ducantur quilibet breuissimi rami Q P,* d e, i l, *O C, qui secent externam peripheriam in R,* f, m, *F. Ostendendum modò est in eisdem conisectionibus E B esse distantiam omnium maximam, & R P propinquiorem maxima maiorem esse remotiore* f e*; pariterque* m l *maiorem esse quàm G A. Ducantur intercepta R* g, m n *parallela E B, &* f h *parallela R P, nec non G S parallela* m l, *& F* a *parallela G* a. *Quoniam intercepta R* g, m n *parallela sunt* Propoſ. 5. addit. huius. *eidem E B, & recta linea D A vertices coniungens, vel I M centra coniungens parallela facta fuit eidem E B; ergo E B, R* g, m n *erunt omnes inter* 38. lib. 5. *se aquales; estque R P minor, quàm R* g*; pariterque* m l *minor, quàm* m n, *quia illa sunt productiones breuissimorum ramorum Q P, &* i l*; igitur qualibet distantia R P, vel* l m *ex vtraque parte ipsius E B sumpta minor est, quàm E B; ideoque E B erit omnium maxima. Deinde quia O B parallela est A D, vel M I, & rami breuissimi O B, Q P se secant vltra axim A O; ergo* 38. lib. 5. *recta linea R P Q producta secabit quoque reliquam parallelarum D A, vel*

I M

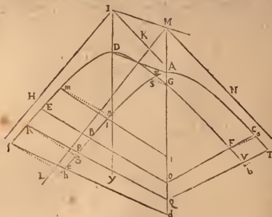
I M ad partes O A M ; ideoque intercepta R P , f h *parallelæ erunt alicui re-*
ctæ lineæ diuidenti angulum D A O ab axe interioris parabolæ , & vertices
coniungente contentum , vel angulum I M L ab asymptoto interioris hyperbolæ ,
& centra coniungente contentum ; igitur R P propinquior verticibus , vel vlte-
rius tendens ad partes reliquæ asymptoti M N maior erit quàm f h *; estque* f h 3.4. addit.



maior f c *quæ est productio rami breuissimi ; ergo distãtia R P propinquior maximæ* 38. lib. 5.
E B maior erit , quàm f c. *E contra quia breuissimus ramus* i l m *cadit inter*
duas parallelas E B , & D A , & secat ramũ breuissimum E B ad partes O i ; 28. lib. 5.
ergo l m *occurrit A D , vel M I ad partes D , vel I ; ideoque intercepta* m l ,
& ei parallela G S erunt æquidistantes alicui rectæ lineæ diuidenti angulum Y
D A , in parabolis , vel H I M in hyperbolis : & propterea G S propinquior ver- 3.4. addit.
tici parabolæ , vel vlterius tendens ad partes reliqua asymptoti M N minor
erit , quàm m l *; estque G A productio rami breuissimi minor quàm G S ; ergo* 38. lib. 5.
m l *maior erit , quàm G A ; & sic vlterius G A maior erit C F , quando oc-*
cursus Z sectionum cadit vltra interceptam F C ad partes T V ; vt in prima
parte ostensum est ,

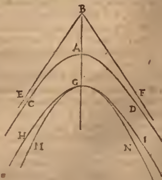
Iisdem manentibus : dico postea , quod vltra distantiam maximam E B ad partes R P , distantiæ , licet semper diminuantur non efficiuntur minores interuallo diametrorum æquidistantium D Y , A O in parabolis , vel interuallo asymptotorum collateralium I H , M L in hyperbolis , vt facile deducitur ex 3. & 4. additarum . At ad partes asymptotorum congruentium hyperbolæ ad se se ipsas propius accedunt , interuallo minori quolibet dato : Nam in locum ab hyperbole B A C , & asymptoto M N contentum extenditur altera hyperbole E D F ; sed distantia hyperbolæ B A C ab asymptoto M N efficitur minor qualibet data ; igitur distantia hyperbola D G F comprahensa ab hyperbole intercipiente minor erit qualibet data distantia .

Tandem iisdem positis ducuntur ex altera parte concursus Z rami breuissimi O C, Q T, qui efficiant distantias F C, T V. Dico F C propinquiorem concursui Z minorem esse, quàm T V. Quoniam angulus Y D A, vel Y I M supponitur



ponitur acutus; suntque I D Y, M A O inter se, parallelæ; ergo angulus D A O, vel I M O, & multò magis I M N erit obtusus; sed quilibet ramus breuissimus
13. 14. lib. 5. *Q V T parallelus F a efficit cum axi A O angulũ acutũ; igitur ramus breuissimus Q T, & ei parallelus F a sunt æquidistantes alicui rectæ lineæ diuidenti angulum D A O, vel I M N; ideoque F a propinquior concursui, vel vlterius ten-*
Propof. 3. & 4. add. *dens ad partes reliquæ asymptoti I H minor est, quàm T V; estque F C minor quàm F a (quia illa est portio rami breuissimi) ergo F C minor est, quàm T V.*
12. lib. 5. *Quod erat propositum.*

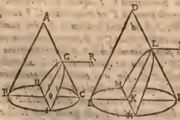
PROP. 9. Addit. *In duabus hyperbolis C A D, H G I similibus, concentricis, & similiter positis circa communem axim B A G; idest consistant circa cõmunes asymptotos E B F: Dico sectionum C A D, H G I interualla sẽper minui, quo magis ab axis vertice recedunt; atque effici posse minora interuallo quolibet dato.*



12. huius. & ex 53. lib. 1. *Describatur hyperbole M G N æqualis, similis, & similiter posita ipsi*

ipsi C A D circa communem axim A G. Et quoniam hyperbola H G I semiaxis transuersus B G maior est transuerso semiaxe B A, hyperboles C A D, pariterque latus rectum illius maius erit huius latere recto (cum latera figurarum sint proportionalia in hyperbolis similibus;) igitur hyperbole H G I maior est hyperbola M G N (quod ab alijs ostensum est), & consistunt circa communẽ axim A G, & vertex G est communis; igitur hyperbole H G I comprahendit hyperbolen M G N; & ideo hyperbole H G I cadit inter duas hyperbolas G M, & A C: & propterea hyperbole G H multo magis successiuè vicinior efficitur hyperbola A C, quàm hyperbole G M; sed duæ hyperbolæ æquales, & similiter positæ A C, & G M semper magis, ac magis ad inuicem approximantur, igitur multo magis hyperbolæ concentricæ A C, & G H semper magis, ac magis ad se se ipsas appropinquantur, & inter se non conuenient vt Pappus demonstrauit. Tandem, quoniã lineæ breuissima, quæ perpendicularis est ad tangentem hyperbolem G H portio ab asymptoto E B, & sectione H G comprahensa effici potest minor quacunque recta linea proposita; cadit verò hyperbole A C inter sectionem G H, & continentem B E; igitur multo magis distantia inter hyperbolas G H, & A C minor erit quacunque recta linea proposita. Quod erat ostendendum. 12. huius. Propos. 7. addit. lib. 7. prop. 208. 29. 30. lib. 5. Propos. 4. lib. 2.

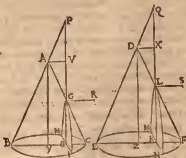
Si in duobus conis ducta fuerint duo triangula per axes A B C, D E F similia, & similiter posita, atq; sectionum I G H, & N L M diametri G O, L K æque ad bases inclinatæ intercipiant cũ triangulorum lateribus A B, D E eisdem G O, L K parallelis, portiones O B, K E æquales; vel cum axibus conorum A Y, D Z diametris æquidistantibus intercipiant portiones O Y, K Z æquales, & efficiant angulos A Y C, D Z F æquales: erunt conicæ sectiones inter se æquales, & in qualibet earum duplum interceptæ poterit figuram sectionis. PROP. 10. Add.



Primo in parabolis, quia triangula A B C, D E F sunt similia, erit B C ad C A vt E F ad F D, & G O, L K sunt parallelæ homologis A B, D E; ergo O C ad C G, & B O ad G A eandem proportionem habebunt, quàm B C ad C A, seu eandem, quàm habet E F ad F D; estque E K ad L D vt E F ad F D; ergo B O ad G A est vt E K ad L D; suntque B O, E K æquales;

 igitur

igitur G A aequalis est L D: & quia in triangulis similibus rectangulum B A
11. lib. 1. C ad quadratum B C, seu A G ad latus rectum G R eandem proportionem habet; quàm rectangulum E D F ad quadratum E F, seu quàm D L habet ad latus rectum L S; igitur A G ad G R erit vt D L ad L S; suntq; A G, D L ostensæ aequales ergo G R, & L S latera recta aequalia sunt, & diametri sectionum efficiunt angulos G O H, L K M aequales; ergo parabolè H G I, & M L N
Prop 10. huius. aequales sunt inter se.

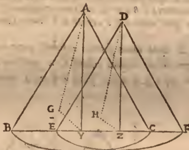


In hyperbolis verò, quoniam P G parallela est axi A Y, & A V parallela est basi B C, & latera P B, & A C sunt communia; igitur P V ad V A est vt A Y ad Y B, & G V ad V A est vt Y A ad Y C: habet verò eadem A Y ad aequales Y B, Y C eandem rationem ergò P V, & G V ad eandem V A habent eandem proportionem, & ideo P V aequalis est V G, atq; punctum V erit centrum sectionis, & quadratum A Y aequale erit quadrato V O (propter parallelogrammum V Y), & quadratum V O aequale est rectangulo P O G cum quadrato V G; pariterque quadratum C Y aequale est rectangulo C O B cum quadrato O Y, & habet quadratum A Y ad quadratum C Y eandem proportionem,
21. lib. 1. quàm latus transuersum P G ad latus rectum G R, seu eandem, quàm habet rectangulum P O G ad rectangulum C O B, ergo diuidendo quadratum V G ad quadratū O Y eandem proportionem habebit, quàm quadratum A Y ad quadratū Y C, seu vt P G ad G R, seu vt quadratum P G ad rectangulum P G R, & ideo quadratum duplæ V G, seu P G eandem proportionem habebit ad rectangulum P G R, atq; ad quadratum duplæ ipsius Y O; quare quadratum duplæ ipsius O Y aequale erit figuræ sectionis seu rectangulo P G R. Eodem modo ostendetur X centrum hyperbolæ M L N, & quadratum L Q ad quadratum duplæ K Z esse vt quadratum D Z ad quadratum Z F, seu vt Q L ad L S, & ideo quadratum duplæ ipsius K Z aequale erit figuræ sectionis, seu rectangulo Q L S. Tandem, quia propter similitudinem triangulorum per axes, sunt anguli C, F aequales, & anguli Y, Z pariter aequales (cum ex hypothesi diametri G O, L K parallelæ axibus A Y, D Z efficiant angulos G O C, L K F aequales); ergo A Y ad Y C erit vt D Z ad Z F, & earum quadrata etiam proportionalia erunt; sed P G ad G R est vt quadratum A Y ad quadratum Y C, atque Q L ad

ad L S est vt quadratum D Z ad quadratum Z F ; igitur P G ad G R eandem proportionem habet , quàm Q L ad L S , & propterea figuræ sectionem erunt similes; ijs autẽ figuris æqualia ostensa sunt quadrata dupliciũ O Y , & K Z , quæ suppositæ fuerunt æquales ; igitur figuræ P G R , & Q L S similes , & æquales sunt inter se , atque diametri æquè inclinatæ sunt ad ordinatim ad eas applicatas H I , M N ; igitur sectiones H G I , M L N æquales sunt inter se , similes , & congruentes , quarum figuræ æquales sunt quadratis duplicium interceptarum O Y , & K Z , quod erat propositum. ex 12. huius. Prop. 10. huius.

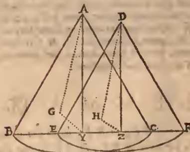
LÆMMA IX.

SI in duobus conis A B C , D E F , bases sint in eodem plano , & duo triangula per axes A B C , D E F fuerint similia , & similiter posita , & in eodem plano existentia , erunt coni similes inter se .



Ducantur à verticibus A , & D duæ rectæ A G , & D H perpendiculares ad bases conorũ, & à terminis axium A Y , & D Z coniungantur rectæ lineæ Y G , & Z H . Quoniã planum , in quo existunt duo triangula A B C , D E F secat planum, in quo bases conorum iacent in vna recta linea, quæ basis est vtriusque trianguli per axes conorum ducti; ideoque B C , & E F in directum constitutæ erunt , & circa angulos æquales B , & E latera A B ad B C , atque D E ad E F sunt proportionalia (propter triangulorum A B C , & D E F similitudinem) erunt quoque ad consequẽtium semisses proportionales, scilicet A B ad B Y erit, vt D E ad E Z circa angulos æquales , & propterea triangula A B Y , & D E Z similia erunt: & ideò duo anguli B Y A , & E Z D, externus interno , æquales erunt inter se ; igitur Y A , & Z D in eodem plano existentes , parallelæ erunt inter se; sunt quoque A G , D H inter se parallelæ (cum sint perpendiculares ad idem planum basium) ergo duo anguli Y A G , & Z D H æquales sunt inter se ; atque anguli G , & H æquales sunt , nempe recti ; igitur in triangulis A Y G , & D Z H , duo postremi anguli A Y G , & D Z H æquales sunt

inter

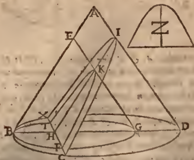


inter se : hi autem anguli inclinationes sunt axium conorum ad suas bases; igitur axes A Y , & D Z aque sunt inclinati ad suas bases : suntque proportionales ad basium semidiametros Y B , & Z E (cum triangula A B Y , D E Z similia ostensa sint) ; igitur coni A B C , & D E F similes sunt inter se. Quod erat ostendendum.

Defin.8. huius.

PROP. 11. Addit.

Data parabola Z duos conos similes exhibere , vt idem planum efficiat in eis duas parabolas æquales eidem datæ parabolæ , quæ asymptoticæ sint , & sibi ipsis viciniores fiant distantia minore quacunque data.



In quolibet plano fiat angulus I H C æqualis angulo inclinationis diametri , & basis parabolæ Z ; & per H C extensi alio quolibet plano ducatur in eo B H G perpendicularis ad X H C ; & fiat quodlibet triangulum H G K , & vt quadratum H G ad rectangulum H K G , ita fiat latus rectum parabolæ Z ad productionem

ductionem K E, & ab E ducatur A E B parallela I H, quæ secet G H in B: postea producatur H K, vt cumq; in I, & per I ducatur A I D parallela E G, quæ secet B G in D; & in plano B X D C, diametris B G, B D, fiant duo circuli, qui sint bases duorum conorum, quorum vertices A, & E, & in eorum superficiebus planum per X I C ductum, efficiat sectiones C I X, & F K T. Dico eas esse parabolas quæsitas. Quoniam recta E G facta est parallela ipsi A D; igitur duo triangula A B D, & E B G per axes conorum ducta similia, & similiter posita in eodem sunt plano; & duo circuli basium in eodem sunt plano; ergo coni A B D, & E B G similes erunt: postea quia triangula A B D, & E B G similia sunt, & I K H communis diameter sectionum ad coincidentes bases C X, F T æque inclinata, & recta linea A E B à verticibus conorum ducta parallelæ sunt inter se, atque intercipiunt in angulis æqualibus A B H, & E B H communem portionem B H basium triangulorum similium per axes; ergo parabolæ C I X, & F K T æquales sunt inter se. Secundò, quia propter parallelas E B, K H sunt triangula E B G, H K G similia; ergo quadratum B G ad rectangulum B E G scilicet latus rectum parabolæ F K T ad K E est, vt quadratum H G ad rectangulum H K G; sed latus rectum parabolæ Z ad K E fuit vt quadratum H G ad rectangulum H K G; igitur duo latera recta, parabolæ Z, atq; parabolæ F K T ad eandem K E habent eandem proportionem, & propterea æqualia sunt, & diametri, ad bases æque inclinatæ sunt ex constructione; igitur parabolæ F K T, & ei æqualis C I X erit æqualis eidem parabolæ Z. Tertiò quia sectionum plano, & communi diametro I K H æquidistat cummune lateris A E B, in quo duo coni se se contingunt; ergo latus A E B nunquàm occurret plano C I X: sed duæ superficies conicæ tantummodò se se tangunt in latere A E B, & reliquis omnibus in locis separatæ sunt; igitur duæ parabolæ C I X, F K T in illo plano positæ per contactum A E B non transeunte, & extensæ in duabus conicis superficiebus nunquàm conuenientibus, erunt asymptoticæ. Quartò quia duæ parabolæ C I X, F K T æquales sunt, & similiter positæ circa communem diametrum I K H; ergo earum distantia semper magis, ac magis diminuuntur quousque sint minores qualibet recta linea data. Quod erat faciendum.

Lem. 9. huius.

Prop. 10. addit.

11. lib. 1.

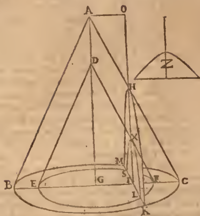
Prop. 10. huius.

Propos. 7. addit.

PROP. 12. Addit.

Data hyperbola Z duos conos similes exhibere, vt idem planum in eis efficiat duas hyperbolas æquales, & similes datæ, quæ asymptoticæ sint, & sibi ipsis semper viciniores fiant, non tamen interuallo minore recta linea data.

In quolibet plano fiat angulus H I M æqualis angulo inclinationis diametri, & basis datæ hyperboles Z, & per M I extenso quolibet alio plano ducatur in eo B I C perpendicularis ad M I K; & sumpto quolibet puncto O in recta linea I H producta, ducatur à puncto O in plano per O I B extenso recta linea O A parallela ipsi B I, & secetur O A æqualis semissi potentis figuram sectionis Z, cuius rectum latus ad transuersum eandem proportionem habeat quàm quadratum A O ad quadratum O H; atque à puncto A ducatur recta linea A D G parallela ipsi H I, & coniungatur A H, quæ secent rectam lineam G I in punctis G, & C, & secetur recta linea G B æqualis G C iungaturq; A B, & à quolibet puncto D in recta A G sumpto ducatur in eodem plano A B C duæ rectæ lineæ D E, & D F parallelæ lateribus A B, & A C; eruntque triangula A B C,



A B C , & D E F similia , & similiter posita : postea in plano per B C , M K ducto , diametris B C , & E F , fiant duo circuli B K C , E L F , qui sint bases duorum conorum , quorum vertices sint A , & D , & in eorum superficiebus planum per H I , M K ductum efficiat sectiones K H M , & L X S : Dico eas esse quæsitas . Quoniam duo triangula A B C ; D E F similia , & similiter posita in eodem sunt plano , pariterquè duo circuli basium in vno plano existunt;
Lem. 9. huius. *ergo duo coni A B C , & D E F similes erunt ; postea quia triangula A B C , & D E F similia sunt , & communis sectionum diameter H X I æque inclinatur ad coincidentes bases M K , S L , & axi communi A D G æquidistat , & in angulis æqualibus intercipiunt G I communem portionem basium triangulorum*
Prop. 10. add. *similium per axes ; igitur hyperbolæ K H M , & L X S æquales sunt , & similes inter se , & earum figuris æqualia sunt quadrata ex dupla intercepta G I descripta . Secundò quia (propter parallelas A O , & B C) triangula H O A , & A G C similia sunt ; igitur quadratum A G ad quadratum G C , seu ad rectangulum B G C eandem proportionem habebit , quàm quadratum H O ad quadratum O A , seu quàm latus transuersum ad rectum figuræ Z ; sed vt quadra-*
12. lib. 1. *tum A G ad rectangulum B G C , ita est latus transuersum ad rectum hyperbolæ K H M ; igitur duæ hyperbolæ Z , & K H M , habent figurarum latera porportionalia ; suntq; prædictæ figuræ æquales cum sint æquales quadratis ex duplis ipsarum A O , & interceptæ G I : quæ sunt æquales in parallelogrammo G*
10 12. huius. *O , & habent angulos à diametris , & basibus contenti , æquales inter se : erunt hyperbolæ K H M , & Z æquales , & similes inter se : & propterea sectio L X S , quæ similis , & æqualis ostensa est ipsi K H M , erit quoque æqualis , & similis eidem sectioni Z . Tertiò , quia in duobus conis similibus , & similiter positis circa communem axim A D G , superficies nunquàm conueniunt , propterea quod latera A B , & D E , à quibus generantur in tota reuolutione inter se*

parallela

parallela conferuantur ; igitur duæ ſectiones K H M , & L X S , exiſtentes in eodem plano ſecante duas ſuperficies, quæ licet in infinitum producantur vbique ſeparatæ ſunt , erunt aſymptoticæ. Quartò, quia duæ hyperbolæ H K M , & L X S ſunt æquales , ſimiles, & ſimiliter poſitæ circa communem diametrum H X I, earum diſtantia ſemper magis , ac magis diminuuntur ; nunquam tamen minores effici poſſunt interuallo duarum æquidiſtantium , hyperbolas continentium . Et hoc erat propoſitum. Prop. 7. addit.

Data hyperbola X duos conos ſimiles exhibere vt idem planum in eis efficiat duas hyperbolas ſimiles , & æquales datæ , quæ aſymptoticæ ſint, & ex vna parte ſibi ipſis viciniores fiant interuallo minori quolibet dato : ex altera verò parte ad ſe ipſas propius accedant interuallo tamen maiore dato : oportet autem vt angulus ab aſymptotis ſectionis X contentus ſit acutus . PROP. 13. Addit.

In quolibet plano fiat angulus A d *O æqualis angulo inclinationis diametri, & baſis hyperbolæ X ; & per O* d *extenſo quolibet alio plano, ducatur in eo recta linea B* d *C perpendicularis ad O* d *G, & ſumpto quolibet alio puncto* b *in recta linea G O in plano per B G C O ducto , centris* d, *&* b *deſcribantur duo*

circuli G C O B, & G Q P L se se contingentes in communi puncto G recta linea G O ducaturque diameter L b Q æquidistans ipsi B C: & vt latus rectum ad transuersum sectionis X, ita fiat quadratum G d ad quadratum d A; & coniungantur recta linea A G, & A O, ducaturque ex puncto P recta linea P N parallela ipsi O A occurrens G A in N, atque A, & N fiant vertices duorum conorum A B C, & N L Q, & secetur D d æqualis semissi potentis figuram sectionis X; ducaturque per punctum D planum E M F æquidistans plano communi A G O per axes ducto, efficiens in conicis superficiebus sectiones H I K, & T V c; Dico eas esse hyperbolas quæsitas. Quoniam propter parallelas A O, N P est A G ad G O, vt N G ad G P, & ad semisses consequentium, scilicet A G ad G d, atque N G ad G b proportionales erunt, ideoque A d, N b erunt parallelæ, & A d ad d G, seu ad d C est vt N b ad b G, seu ad b Q; estque d C etiam parallela b Q; ergo plana A B C, & N L Q parallela sunt, & anguli A d C, & N b Q æquales sunt, atque triangula A d C, & N b Q similia erunt inter se; ideoque circa angulos æquales C, & Q erit A C ad C d, vt N Q ad Q b, & ad consequentium duplas, scilicet A C ad C B, atq; N Q ad Q L proportionales erunt; & propterea triangula A B C, & N L Q similia erunt, & similiter posita, & inter se parallela; ergo efficient in duobus planis A O G, & M E F inter se æquidistantibus sectionū diametros I D, & V a parallelas conorū axibus A d, & N b, & inter se; quare constituent cum sectionū basibus

coinci-

coincidentibus angulos æquales I D H, & V a T & cum ipsis D d, & a b etiã
parallelis inter se continebunt angulos æquales I D d, & V a b, eruntque in-
tercepta D d, a b æquales (cum sint latera opposita parallelogrammi D b);
igitur hyperbole H I K, & T V c æquales sunt inter se, & similes atq; earum Prop. 10. addit.
figuris æqualia sunt quadrata ex duplis interceptarum D d, & a b. Et quia huius.
triangula A G O, N G P sunt similia in eodem plano, suntque pariter duo cir-
culi basium in vno plano extensi; igitur coni A B C, & N L Q similes sunt Lem. 9.
inter se. Secundò quia vt quadratum A d ad rectangulum G d O, seu ad re- huius.
ctangulum B d C ita est latus transuersum ad rectum sectionis H I K, & (ex
constructione) in eadem proportione erat latus transuersum ad rectum hyperbo-
les X, atque anguli I D K, & A d O æquales sunt inter se (propterea quod
D I, d A parallelæ sunt, pariterque D K, d O parallelæ sunt inter se, cum
communes sectiones sint plani basis, & duorum planorum æquidistantium K I
H, & O A G): & erat angulus inclinationis diametri, & basis hyperbolæ X æ-
qualis angulo A d O; igitur diametri sectionum X, & H I K ad suas bases
æque inclinantur, & habebant latera earundem figurarum proportionalia; suntq;
prædictæ figuræ æquales, cum sint æquales quadrato ex dupla intercepta D d vt
dictum est: igitur sectiones H I K, & X similes sunt inter se, & æquales;
ideoque reliqua sectio T V d, quæ æqualis, & congruens ostensa est ipsi H I K, 10. 12. huius.
erit quoque similis, & æqualis eidem hyperbolæ X. Tertiò quoniam plana H I
K, & G A O æquidistantia sunt, nunquam conuenient; & ideo planum H I K
nunquam lateri A N G alterius plani occurret; sed superficies conicæ se se tan-
tummodo tangunt in communi latere A N G, & alibi perpetuo separatæ incedunt;
igitur duæ sectiones H I K, & T V c in plano E I K existentes, quæ infinitè
producuntur in superficiebus conicis, nunquam se se mutuo secant; igitur sectio-
nes ipsæ asymptoticæ sunt. Quartò ducantur rectæ lineæ G E, O F, P R tan-
gentes circulos in extremitatibus communis diametri G P O, quæ parallelæ erunt
inter se (cum perpendiculares sint ad communem diametrum G P O): postea
producantur plana E G A, F O A, R P N tangentia conos in lateribus G A,
O A, & P N, & extendantur quousque secent planum conicæ sectionis H I K in
rectis lineis E S M, F M, R S. Et quoniam duo plana æquidistantia G A O,
et E M F efficiunt in eodem plano E G A, vtrumque conum contingente, duas
rectas lineas G A, E M æquidistantes inter se: pari ratione in plano tangente
F O A erunt rectæ lineæ F M, et O A parallelæ inter se: simili modo in plano
R P N erunt P N, et R S inter se æquidistantes, cumque A O, et N P paral-
lelæ sint, erunt quoque F M, et R S inter se æquidistantes; suntque E M, et
M F asymptoti continentes hyperbolen E I K pariterq; rectæ lineæ E S, S R sunt Maurol.
asymptoti hyperboles T V c: quare duæ hyperbolæ H I K, et T V c, similes ei- lib. 3. de
dem X, et æquales, & similiter positæ, quarum duæ asymptoti F M, R S æqui- lin. horar.
distantes sunt; reliquæ verò E M, & E S coincidunt (cum existant in eodem ca. 6. 7.
plano tangente E A), & angulus ab eis contenctus E M F, vel E S R est acu-
tus (cum æqualis sit acuto angulo ab asymptotis sectionis X contento, propter si-
militudinẽ sectionũ, vt ab alijs ostensum est): poterit ergo duci ramus breuissimus Propos. 6.
in sectione T V c ad partes V c qui æquidistãs sit rectæ lineæ V I vertices sectionũ addit.
coniungenti: eritque illius breuissima portio inter sectiones comprehensa distantia huius.
omniũ maxima; & propterea interualla sectionũ ad vtrasq; partes maxima distã- Propos. 8. addit.
tia successiuè diminuuntur, & ad partes æquidistantiũ asymptotorũ F M, R S dimi- huius.

 nuuntur

nuuntur quidem; sed non efficiuntur minora interuallo quo parallelæ asymptoti distant inter se; ex altera verò parte perueniri potest ad interuallum minus quolibet dato. Et hoc erat faciendum.

PROP. 14. Add. *Data hyperbola eadem X præcedentis propositionis describere duos similes conos, vt idem planum in eis efficiat duas hyperbolas similes datæ sectioni, quæ asymptoticæ sint, & ex vtraque parte sibi ipsis viciniores fiant interuallo minori quolibet dato.*

In quolibet plano fiat angulus A d *G æqualis angulo inclinationis diametri, & basis hyperbolæ datæ X, & per G* d *extenso quolibet aliò plano, ducatur in eo recta linea B* d *C perpendicularis ad G* d *O, & sumpto quolibet alio puncto* b *in recta linea B C in plano per B G O extenso, centris* d*, &* b*, describãtur duo circuli inter se æquales G C O B, & S Q P L sese secantes in duobus punctis R,* a*: atq; vt latus rectum ad transuersum sectionis datæ X, ita fiat quadratũ G* d *ad quadratũ* d *A; & ducatur recta linea A N M parallela ipsi B C, quæ secet* b *N æquidistantẽ* d *A in N, & coniungantur rectæ lineæ A B, A C, N L, N Q, & fiant A, & N vertices duorũ conorũ A B C, N L Q, & in eorũ superficiebus planum M* c *T æquidistans planis A G O, & N S P efficiat sectiones H I K, & T V* c*, quarum diametri D V I genitæ à triangulis A B C, & N L Q per axes in eodem plano existentibus sunt æquidistantes axibus conorum A* d*, N* b*, propter planorum æquidistantiam: Dico, eas esse hyperbolas quæsitas. Quoniam (propter æquidistantiam oppositarum linearum) est spatium A* b *parallelogrammum; igitur conorum axes A* d*, N* b *æquales sunt inter se, & æquè inclinantur ad communem rectam lineam B C Q (propter æquidistantiam earundem A* d*, N* b*); suntque æqualium circulorum radij* d *B,* d *C,* b *L,* b *Q æquales inter se; igitur triangula A B C, N L Q similia sunt inter se, & similiter*

ter

ter posita in eodem plano; suntquè etiam duo circuli basium in vno plano extensi; igitur coni A B C, & N L Q similes sunt inter se; & quoniam, vt latus transuersum ad rectum sectionis datæ X, ita est quadratum A d *ad quadratum radij G* d, *& ita est latus transuersum ad rectum sectionis H I K; pariterque vt quadratum N* b *ad quadratum radij L* b *ita est latus transuersum ad rectũ hyperbolæ T V* c; *Et quadrata axium ad quadrata radiorum baseos eandem propertionem habet ideo latus transuersum ad rectum sectionis H I K eandem proportionem habebit, quàm latus transuersum ad rectum alterius sectionis T V* c, *seu eandem, quàm habet latus transuersum ad rectum datæ sectionis X; atque diametri I V D, & diameter sectionis X aquè inclinantur ad bases, vt dictum est; igitur duæ sectiones H I K, & T V* c, *nedum datæ hyperbolæ X; sed etiam inter se similes sunt. Secundò quoniam duæ peripheriæ circulorum basium circa communem diametrum B C Q se se mutuo secant in duobus punctis R, &* a, *quæ necessario cadunt inter duas circulorum diametros G O, S P perpendiculares ad communem diametrum B C Q; igitur superficies conorum vicissim se secant semper inter duo triangula, per conorum axes A G O, & N S P, in reliquis autem locis separata sunt; planum verò efficiens sectiones H I K, T V* c *cadit nõ inter axes A* d, *& N* b; *igitur duæ sectiones H I K, & T V* c *existentes in duabus conicis superficiebus, non se secantibus, nunquàm conuenient, & asymptoticæ erunt. Tertiò quoniam recta linea N A M per vertices conorum ducta parallela est communi basi B Q triangulorum per axes, & secat diametrum communem D V I in M: ergo (sicuti ostensum est in prop.* 10. *addit. huius) erit punctum M centrum sectionis H I K, atq; centrum alterius sectionis T V* c; *ergo duæ sectiones H I K, & T V* c *similes sunt inter se, concentricæ, & similiter positæ circa communem diametrum D V I; igitur sectionum internalla semper magis, ac magis in infinitum minuuntur, & reperiri possunt minora quolibet internallo dato. Et hoc erat ostendendum.*

Lem. 9. huius.

Prop. 12. huius.

Propof. 9. addit. huius.

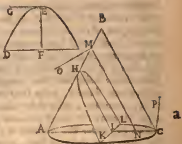
SECTIO DECIMA

Continens Proposit. XXVI. XXVII. & XXVIII.

PROPOSITIO XXVI.

IN cono recto, cuius triangulum per axim sit A B C reperire sectionem datæ parabolæ D E æqualem, cuius axis E F, & erectum E G,

Vt qua-



Vt quadratum A C ad C B in B A, ita ponatur E G ad B H: & educamus H I parallelam B C, & extendatur per H I planum eleuatum super triangulum A B C ad angulos rectos efficiens in cono sectionem K H L. Dico eam æqualem esse sectioni D E. Quia quadratum A C ad C B in B A est, vt E G ad B H; ergo potentes eductæ ad axim H I in sectione K H L possunt applicata contenta ab abscissis illarum potentium, & ab E G; quare E G erit erectum sectionis K H, & idem etiam est erectum sectionis D E; ergo duo erecta duarum sectionum sunt æqualia, & propterea sectiones æquales sunt (1. ex 6.) a

Et dico, quod in cono A B C reperiri non potest sectio alia parabolica, cuius vertex sit super A B, quæ eidem D E sit æqualis. Si enim hoc est possibile, sit axis illius sectionis M N, qui quidem cadet in triangulo A B C; quia conus est rectus, & erectum illius sit M O; atq; M O ad M B erit, vt G E ad B H; estque B H maior, quàm B M; ergo M O minor est, quàm G E; quare sectio, cuius axis est M N non est æqualis sectioni D E; & tamen supposita fuit æqualis illi, quod est absurdum. Quare patet propositum. b

ex comu. Prop. 1. huius.

PROPOSITIO XXVII.

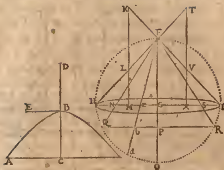
Sit deinde hyperbole A B, cuius axis C D, inclinatus B D, & erectus B E; atque quadratum axis F G dati coni recti F H I ad quadratum G H semidiametri basis eius, non habeat maiorem proportionem, quàm habet figura, scilicet quàm habet D B ad B E. a

Sit prius proportio eadem, & producamus I F ad K; & ducamus K L subtendentem angulum H F K, quæ parallela sit ipsi F G, & æqualis existat ipsi D B; & per K L planum extendatur eleuatum ad angulos rectos super planum trianguli H F I, quod efficiet in superficie conica sectionem hyperbolicam, cuius axis erit L M, & inclinatus K L. Et quia F G parallela est K L, erit quadratum F G ad G I in G H, vt K L inclinatus ad illius erectum, siue vt D B ad B E; facta autem fuit K L æqualis D B; ergo erectus inclinati K L æqualis est B E; & propterea sectio, cuius axis est L M æqualis est sectioni A B. Nec reperiri poterit in cono H F I alia sectio hyperbolica, cuius vertex sit super H F, quæ æqualis sit A B; quia, si reperiri posset esset illius axis in plano trianguli H F I, & eius inclinatus, subtendens angulum H F K æqualis esset D B, nec tamen esset K L, neque ipsi æquidistans (eo quod, si æquidistaret b

12. lib. 1.

2. huius.

ipsi



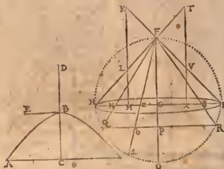
ipſi K L, non eſſet eidem æqualis.) His poſitis ſi educatur ex F linea ipſi parallela cadet inter F G, F H, aut inter F I, F G; ſitque F N; igitur quadratum F N ad I N in N H eſt, vt D B ad B E: quod eſt abſurdum; quia quadratum F N maius eſt, quàm quadratum F G, & N H in N I minus eſt, quàm quadratum G H. 12. lib. 1.

Poſtea habeat quadratum F G ad quadratum G H minorem proportionem quàm habet D B ad B E; & circumſcribamus circa triangulum H F I circulum; & producamus F G quouſque occurrat circuli circumferentię in O; ergo quadratum F G ad quadratum G H, nempe ad F G in G O habet minorem proportionem, quàm D B ad B E: & ponamus F G ad G P, vt D B ad B E; & per P ducamus P Q parallellam H I; & coniungamus F R, F Q; quæ occurrant H I in S, N: quare D B ad B E eſt, vt F G ad G P, quæ eſt, vt F N ad N Q; nempe vt quadratum F N ad F N in N Q æquale ipſi I N in N H, atque vt quadratum F S ad F S in S R, nempe vt quadratum F S ad I S in S H; & educamus T V, K L, quæ ſubtendant duos angulos H F K, I F T, & ſint parallelæ ipſis F N, & F S, & æquales ipſi D B; igitur duo plana per K L, T V extenſa ſuper triangulum H F I ad angulos rectos eleuata, producunt in cono H F I ſectiones hyperbolicas, quarum axes L M, V X, & inclinati ipſarum L K, T V, & ſinguli earum ad ſuos erectos eandem proportionem habent, quàm D B ad B E, & propterea figuræ ſectionum ſimiles ſunt, & æquales, ideoque ſectiones, quarum axes ſunt L M, V X ſunt æquales ſectioni A B. 2. huius.

c d

e Nec reperitur ſectio præter iam dictas, cuius vertex ſit ſuper aliquam duarum linearum H F, F I, & ſit æqualis ſectioni A B. Quia ſi reperiri poſſet, caderet eius axis in planum trianguli H F I, illiuſque axi educatur parallela F Z a, quæ non cadet ſuper F R, neque ſuper F Q, eritq; quadratum F Z ad I Z in Z H, quod eſt æquale ipſi F Z in Z a, nempe F Z ad Z a eandem proportionem haberet, quàm D B ad B E; ſed D B ad B E eſt, vt F G ad G P, nempe F Z ad Z b; ergo proportio F Z

ad

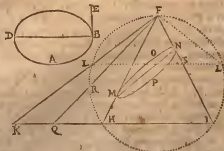


ad Z b, & ad Z a eſt eadem; & propterea Z b æqualis eſt Z a, quod eſt abſurdum.

Ponamus iam quadratum F G ad G H in G I maiorem proportionem habere, quàm D B ad B E. Dico in cono H F I exhiberi non poſſe ſectionem æqualem hyperbolæ A B. Si enim exhiberi poſſet illius axi aliqua parallela reperiretur vt F N: & quadratum F N ad I N in N H maiorem proportionem habens, quàm quadratum F G ad quadratum G H, erit vt D B ad B E; quæ minor eſt proportione quadrati F G ad quadratum G H: quod eſt abſurdum. Non ergo reperitur in cono H F I ſectio æqualis hyperbolæ A B. Et hoc erat oſtendendum.

PROPOSITIO XXVIII.

SIt iam ſectio elliptica A B, cuius axis tranſuerſus B D, & erectus illius B E, & circa coni triangulum H F I deſcri- a

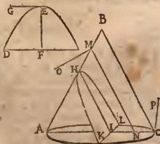


bamus

bamus circulum, & ex F ducamus lineam ad H I, occurrentem ipsi extra circulum in K, & occurrat circulo in L, itaut sit F K ad K L, vt D B ad B E (& hoc est facile, vti demonstraui-
b mus in 59. ex 1.), & educamus in triangulo chordam M N
c parallelam F K, & æqualem D B; Aio quod planum transiens per M N erectum super triangulum coni producit in cono H F I sectionem ellipticam, æqualem sectioni A B.

Quia D B transuersus ad eius erectum B E eandem proportionem habebat, quàm F K ad K L, nempe quàm quadratum F K habet ad F K in K L, quod est æquale ipsi I K in K H; estque vt M N parallela ipsi F K 13.lib. 1.
ad illius erectum; quare D B ad B E eandem proportionem habet, quàm M N ad illius erectum; & M N æqualis est D B; igitur figuræ dua-
d rum sectionum A B D, M O N P sunt æquales, & similes, & ideo 2. huius.
duæ illæ sectiones sunt æquales. Dico insuper, quod non reperitur in
e cono H F I vlla alia sectio elliptica, habens verticem super F I, cuius axis non æquidistet alicui duarum F L K, quæ æqualis sit eidem B A D. Quia si possibile esset, ostenderetur axis eius cadere in planum trianguli H F I, quia sectio est elliptica, & æqualis sectioni A B, vtiq; eius axis occurret F I, F H, & æqualis est D B; cumque vertex illius sit super F I, non cadet axis eius super M N, nec ipsi erit parallelus; & ideo educta F Q parallela axi eius non cadet F Q super F K, & secabit arcum F H in R; eritque proportio axis illius sectionis ad eius erectum, nempe 13.lib. 1.
quadratum F Q ad I Q in Q H, quod est æquale ipsi Q F in Q R, nempe vt F Q ad Q R, ita erit D B ad B E, quæ eandem proportionem ha-
f bet quàm F K ad K L, & diuidendo permutandoq; F R maior subtensa ad minorem F L eandem proportionem habebit, quàm R Q minor intercepta ad maiorem K L; quod est absurdum: non ergo reperitur in cono H F I sectio elliptica, verticem habens in F I, quæ sit æqualis sectioni A B, præter superius expositam. Et hoc erat propositum.

Notæ in Proposit. XXVI.



a Ergo potentes egredientes ex sectione L H K ad axim H I poterunt applicatum, quod continet abscissum illius potentis cum G E; ergo G E est erectus sectionis L H; & est etiã erectus sectionis D E; igitur duo applicata duarum sectionũ sunt æqualia, & ideo sectio D E congruit sectioni K H L, & propterea æquales sunt, &c. *Ex eo quod quadratum A C basis trianguli per axim coni recti ad rectangulum C B A, sub eius lateribus*

contentum, habet eandẽ rationem, quam G E ad H B, sufficienter deducitur, quod
11. lib. 1. *G E sit latus rectum tàm parabolæ L H K, quàm D E; & ideo erit parabole L*
Propos. 1. huius. *H æqualis D E. Non igitur necesse est, vt rectangula sub abscissis, & lateribus rectis æqualibus ostendatur æqualia inter se, & inde eliciatur æqualitas, & congruentia sectionum. Quapropter casu illa verba in Codice Arabico irrepsisse puto.*

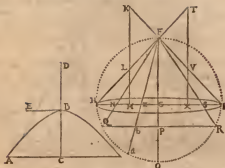
Et dico, quod non reperiatur in sectione A B C alia sectio parabolica; b
quia si reperiretur, &c. *Verba, quæ in hoc textu addidi ex serie demonstrationis facile colliguntur: Sed animaduertendum est, quod ne dum in cono recto, sed in quolibet cono scaleno quomodolibet per axim secetur triangulo A B C, designari potest in eius superficie parabole æqualis data D E.*

Ducatur C P contingens circulum basis in C, & in parabola D E ducatur
51. lib. 2. *diameter E F, & contingens verticalis, quæ contineat angulum F E G æqualem angulo B C P; sitque G E latus rectum diametri F E; atque vt quadratum C A ad rectangulum C B A, ita fiat G E ad H B, & per H extendatur planum L H K æquidistans plano per B C P ducto. Dico sectionem L H K esse parabolen quæsitam. Quia plana æquidistantia L H K, & B C P efficiunt in circulo basis rectas P C, L K inter se parallelas, & in plano A B C efficiunt rectas H I, B C inter se parallelas; ergo anguli B C P, & H I L æquales sunt, sed in parabola D E diameter E F efficit eum ordinatis ad eam applicatis angulos*
Conu. 46. lib. 1. *æquales F E G, scilicet ei, qui cum tangente verticali constituit, seu angulo B C P; ergo duarum sectionum L H K, & D E, diametri H I, & E F æque sunt inclinatæ ad suas bases, cumquè latus rectum parabolæ L H K ad H B sit, vt quadratum C A ad rectangulum C B A, seu vt G E ad H B; igitur duo latera recta similium diametrorum I H, & F E ad H B eandem proportionem habent; & ideo æqualia sunt inter se; quare sectiones ipsæ æquales, & congruen-*
10. huius. *tes erunt. Quod erat ostendendum.*

Multoties in eodem cono duæ parabolæ æquales subcontrariæ duci possunt, vt Mydorgius demonstrauit.

Notæ in Proposit. XXVII.

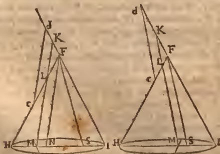
Deinde sit hyperbole, vt A B, & axis illius C D, & inclinatus B D, & crectus B E, ita vt non sit proportio quadrati axis coni ad quadratum dimidij diametri illius basis, vt quadratum F G ad quadratum G H, maior, quàm proportio figuræ sectionis: &c. *Sensus huius propositionis hic erit. In cono recto F H I, cuius triangulum per axim H F I reperire sectionem æqualem hyperbole datæ A B, cuius transuersus axis D B, & latus rectum B E. Oportet autem, vt quadratum F G axis dati coni ad quadratum radij G H circuli basis non habeant maiorem proportionem, quàm habent* a

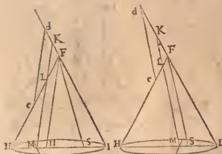


bent figuræ latera, ſcilicet, quàm habet D B ad B E. At quomodo duci debeat ſubtenſa K L quæ æqualis ſit ipſi D B, & parallela alteri F G, oſtendetur inferius.

b Et non reperitur in cono H F I alia ſectio hyperbolica ſuper F H, & æqualis A B, &c. *Addidi verba quæ ad huius textus integritatem facere videbantur.*

c Et educamus T V, K L, quæ ſubtendant duos angulos L F K, I F T, & ſint parallelæ ipſis F N, F S, & æquales D B, &c. *Quomodo autem hoc fieri poſſit modo oſtendemus. Sumatur in recta linea H F quodlibet punctum* c *inter F, & H; atque à puncto* c *ducatur recta linea* c d *parallela ipſi F N, vel F S, quæ ſecet productionem alterius lateris I F in* d*, & quàm proportionem habet* c d *ad D B, eandem habeat C F ad F L, & per punctum L ducatur recta L K parallela ipſi* c d*. Manifeſtum eſt* c d *ad L K eandem proportionem habere, quàm* c *F ad F L, ſeu quàm* c d *ad B D; & ideo K L æqualis erit B D, & ſubtendit angulum L F K, eſtque parallela ipſi* c d*, ſeu ipſi F N, vel F S. Et hoc erat faciendum.*





Igitur duo plana transeuntia per K L, T V eleuata super triangulum H F I ad angulos rectos producunt in cono H F I duas sectiones hyporbolicas, quarum axes L M, V X, & inclinati ipsarum L K, V T, & singuli eorum ad suos erectos sunt, vt D B ad B E; ergo figuræ trium sectionum sunt similes, & æquales; & propterea duæ sectiones, quarum axes sunt L M, V X sunt æquales sectioni A B, &c. d

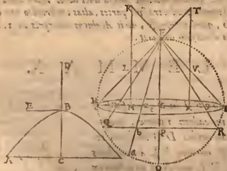
Ex textu mendoso expungi debent superuacanea aliqua verba, sicut in contextu habetur. Non enim verum est, quod duæ tantummodo hyperbole æquales eidem A B duci possunt in cono recto H F I, vertices habentes in lateribus H F, & F I, sed quatuor inter se æquales esse possunt; nam super latus F H duci possunt duæ hyperbolæ, quarum axes transuersi K L æquales sint ipsi B D, & æquidistantes sint rectis lineis F N, & F S: Quod sic ostendetur. Quoniam recta linea Q R ducta est parallela ipsi H I, erunt duo arcus circuli intercepti H Q, I R æquales inter se; & ideo duo anguli ad peripheriam H F Q, & I F R æquales erunt inter se; posita autem fuit K L æqualis, & parallela ipsi F N; igitur duo anguli alterni K L F, & H F N æquales sunt inter se: pari ratione; quia reliqua K L ducta est parallela ipsi F S, erit angulus externus S F I æqualis interno, & opposito, & ad easdem partes L K F; & ideo duo triangula L F K habent angulum F, communem, & duos angolos in singulis triangulis K, & L æquales; igitur sunt æquiangula, & similia, &, vt antea dictum est, fieri possunt duæ rectæ lineæ K L æquales eidem D B, & inter se: si igitur per duas rectas lineas K L ducantur plana perpendicularia ad planum trianguli per axim H F I, efficientur in cono recto duæ hyperbole, quarum bini axes transuersi K L sunt æquales: & quia, propter parallelas H I, Q R, est F N ad N Q seu quadratum F N ad rectangulum F N Q vt F S ad S R seu vt quadratum F S ad rectangum F S R; sed rectangulum H N I æquale est rectangulo F N Q, & rectangulum H S I æquale est rectangulo F S R: ergo quadratum F N ad rectangulum H N I eandem proportionem habet, quàm quadratum F S ad rectá-
12. lib. 1. *gulum H S I; estque latus transuersum K L ad suum latus rectum, vt quadratum F N ad rectangulum H N I, pariterque latus transuersum K L alterius*
Ibidem. *sectionis ad suum latus rectum est vt quadratum F S ad rectangulum H S I:*

igitur

igitur duo æqualia latera transuersa K L ad sua latera recta eandem proportionem habent, & ideo huiusmodi latera recta æqualia sunt inter se; ideoque duæ hyperbole genitæ, habentes vertices in eodem latere F H, æquales sunt inter se, quas vocat Mydorgius subcontrarias. Simili modo duæ aliæ hyperbole inter se, & prioribus æquales in eodem cono duci possunt, vertices habentes in latere F I. 10. huius.

e Nec reperitur tertia, cuius vertex sit super aliqua duarum linearum H F, F I, & sit æqualis sectioni A B, quia, &c. *Immutaui particulam, quæ propositionem reddebat falsam, id quod colligitur ex constructione, & progressu demonstrationis: Qualibet enim alia sectio, præter quatuor assignatas, habebit axem æquidistantem alicui rectæ vt F Z, quæ cadit inter F N, & F S; & hac ostendetur inæqualis prædictis sectionibus, & ipsi A B.*

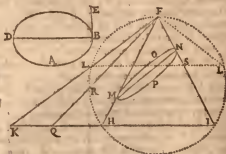
f Deinde ponamus quadratum F G ad G H maius, quàm D B ad B E. Dico, non reperiri in cono H F I sectionem æqualem sectioni A B: nam, si reperiretur, esset vel æqualis parallela suo axi, & erit quadratum N F ad I N in N H, &c. *Legendum esse vt in textu dixi constat ex progressu totius propositionis. Iam facili negotio demonstratio perfici potest; nam axis F G minor est quàm F N, quæ subtendit angulum rectum G, quadratum vero G H semissis totius H I maius est rectangulo I N H, sub inæqualibus segmentis contentum; propterea quadratum F N ad rectangulum I N H maiorem proportionem habebit, quàm quadratum G F ad quadratum G H: estque D B ad B E, vt quadratum F N ad rectangulum I N H; propterea quod F N parallela est axi illius sectionis, quæ posita fuit æqualis A B; igitur D B ad B E maiorem proportionem habet, quàm quadratum F G ad quadratum G H; quod est contra hypothesin: habebat enim quadratum F G ad quadratum G H maiorem proportionem, quàm D B ad B E. Non ergo reperitur in cono; &c.* 12. lib. 1.



Sicuti in præcedenti propositione factum est, nedum in cono recto, sed etiam in quolibet cono scaleno, quomodolibet per axem sectio à triangulo H F I determinari posset, quando, & quomodo in eo designari posset sectio æqualis datæ hyperbole A B. Quod ab alijs factum est.

Notæ in Proposit. XXVIII.

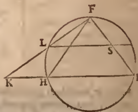
DEinde sit sectio elliptica, vt A B, & axis eius transuersus B D, & erectus illius B E; & sit triãgulum coni H F I, & circumducamus circa illum circulum, & educamus ex F lineam F L K occurrentem ipsi extra circulum in K; & occurrat circulo in L ita vt sit F K ad K L, vt D B ad B E; & est facile (vti demonstrauimus in 59. ex 1.), &c. a



Sensus propositionis hic erit. In cono recto, cuius triangulum per axim H F I reperire sectionem aequalem datæ ellipsi A B, cuius axis transuersus D B, & latus rectum B E. In constructione postea duci debet recta linea F L K extra circulum, & triangulum ad vtrasque partes, alias constructio non esset perfecta.

Lemma verò, quod reposuisse, dicit Arabicus interpres in 1. libro, ab hoc sequenti forsam diuersum non erit.

L E M M A X.



SEcetur latus F I in S, vt sit F I ad I S in eadem ratione, quàm habet axis transuersus D B ad latus rectum B E: & ducatur S L æquidistans trianguli basi H I, quæ secet circulum ex vtraque parte in L, & coniungantur rectæ lineæ F L, producanturque quousquè secent basim H I in punctis K.

Quoniam in triangulo F I K ducitur recta linea S L æquidistans basi I K, erit F I ad

erit

I S, vt P K ad K L: sed erat D B ad B E, vt F I ad I S; igitur F K ad K L eandem proportionem habebit: quàm D B ad D E.

b Et educamus in triangulo chordam M N parallelam K F, & æqualem D B, &c. *Non vna, sed duplex recta linea M N duci potest parallela cuilibet duarum F K, quæ interius subtendat angulum verticis F trianguli H F I per axim ducti. Et potest etiam effici M N æqualis ipsi D B, vt in expositione præcedentis propositionis ostensum est.*

c Itaque planum, transiens per M N, producit in cono H F I sectionem ellipticam æqualem sectioni A B; quia, &c. *Addidi verba, quæ in textu desiderantur, vt sensus perfectus sit.*

d Ergo duæ illæ sectiones sunt æquales, &c. *Concipi debet sectio N O M P, duplex, quia nimirum duæ sectiones sub contrariæ, æquales sunt, vt facile cum Mydorgio ostendi potest.*

e Et dico, quod non reperiatur in cono H F I sectio elliptica, habens verticem super F I; quia si possibile esset, &c. *Textus valde corruptus exposito modo restitui debere constat ex progressu demonstrationis.*

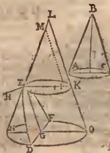
f Et diuidendo F R maior ad minorem R Q est vt F L minor ad maiorem K L, &c. *Supplendæ fuerunt particulæ aliquæ ad tollendam equiuocationem.*

SECTIO VNDECIMA

Continens Proposit. XXIX. XXX. & XXXI.

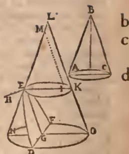
PROPOSITIO XXIX.

Dato cono recto A B C, conum exhibere ei similem, qui datam sectionem D E F contineat, cuius axis E G, & erectus E H; sitque prius sectio parabole.



Super E G educatur planum ad sectionem D E F ad angulos rectos eleuatum, in quo ducatur E I K, quæ contineat cum E G angulum
a æqualem ipsi angulo C: & ponamus E H ad E K, vt A C ad C B, & faciamus super E K triangulum E L K simile triangulo A B C, vt angulus verticalis L æqualis sit angulo B. Faciamus etiam conum, cuius vertex sit L, eiusque basis circulus, cuius diameter sit E K, qui sit eleuatus super triangulum E L K ad angulos rectos: erit igitur angulus E K L æqualis ipsi C, sed

fed angulus K E G factus fuit etiam eidẽ æqualis; igitur L K, quod eſt latus trianguli per axim coni tranſeuntis, parallelum erit ipſi E G: & propterea planum, in quo eſt ſectio D E F producit in cono ſectionem parabolicam; & quia A C ad C B eſt, vt H E ad E K, & vt E K ad K L; igitur H E ad E L (quæ eſt æqualis ipſi K L) eandem proportionem habet, quàm quadratum E K ad quadratum K L, nempe ad
11. lib.1. K L in L E: quaproptor H E eſt erectus ſectionis prouenientis in cono, ſed eſt etiam erectus ſectionis D E F; igitur D E F exiſtit in ſuperfi-
Def. 8. huius. cie coni, cuius vertex eſt L, qui ſimilis eſt cono A B C: eo quod triangulum A B C ſimile eſt triangulo E L K. Dico etiam, quod ſectio D E F contineri non poteſt ab aliquo alio cono, ſimili cono A B C, cuius vertex ſit ex eadẽ parte ſectionis præter conum iam exhibitum. Nam (ſi poſſibile eſt) ſit conus habens verticem M, & triangulum eius erectum ſit ſuper planum ſectionis D E F, & communis ſectio illius, & coni ſectionis erit axis eius; eſtque E G illius axis; ergo hæc eſt abſciſſio communis eorundem planorum; ſed eſt E G abſciſſio communis plani ſectionis, & plani trianguli K E L, ſuper quod eſt etiam erectum; igitur duo triangula E L K, E M
Def. 8. I ſunt in eodem plano, & angulus L æqualis eſt M (propter ſimilitudinẽ duorum conorum); ergo E M eſt indirectum ipſi E L, & educta E K ad
Def. 9. I ſectio D E F continebitur in cono, cuius vertex eſt M: ſi autem ponamus proportionem lineæ alicuius ad E M, eandem quàm habet quadra-
11. lib.1. tum E I ad I M in M E, linea illa eſſet erectus ſectionis D E F; ſed H E erat erectus ſectionis D E F; igitur H E eſt illa linea, hæc autem ad E L eandem proportionem habebat, quàm quadratum E K ad K L in L E; ergo quadratum E K ad K L in L E eandem proportionem habet, quàm quadratũ E I ad I M in M E; igitur H E ad E M, & ad E L eandem proportionem habet: quod eſt abſurdum. Non ergo in aliquo alio cono ſectio contineri poteſt, vt diximus. Et hoc erat propoſitum.



b
c
d
e
f

PROPOSITIO XXX.

SI ſectio hyperbolica D E F, cuius axis E G inclinatus E H, & erectus E I (oportet autem, vt quadratum axis B Q coni recti ad quadratũ ſemidiametri baſis illius A Q non maiorẽ proportionẽ habeat, quàm habent figuræ latera). Et habeat prius eandem proportionẽ, quàm H E ad E I, & producamus A B ad M, & ſuper H E in plano erecto ad ſectionẽ D E F deſcribamus ſegmentũ circuli E L H, quod capiat angulum æqualem angulo M B C, & bifariam ſecemus arcum E O H in O, & educamus perpendicularem O N ſuper H E; & producamus illam, quouſque occur- a

rat

rat circumferentiæ in L, & iungamus E L, & L H, quæ occurrat in K perpendiculari ex puncto E super lineam E H. Et quia E K parallela est L O erit angulus K æqualis H L O, qui est semissis anguli H L E, & hic est æqualis duobus angulis K, K E L; igitur sunt æquales; quare K L E est æquicrus, & angulus K L E æqualis est A B C; quia angulus H L E æqualis est M B C; quapropter K L E simile est A B C, quia æqualia crura etiam habet! Si autem ponamus K L E triangulum coni, cuius vertex L, & planum illius trianguli erectum ad planum D E F; vtique planum sectionis producit in cono hyperbolen, cuius axis E G, inclinatus E H; eo quod si educamus L P, B Q perpendiculares in duobus triangulis, habebit quadratum B Q ad C Q in Q A (quod est vt H E ad E I) eandem proportionem, quàm quadratum L P ad P K in P E: quare potentes æductæ in illa sectione ad axim E G, poterunt comparata, applicata ad E I erectum; sed potentes, eductæ in sectione D E F, possunt quoque illa applicata; ergo sectio D E F æqualis est sectioni, prouenienti in cono, cuius vertex est L, & existit in eodem plano, habetque eundem axim: quare conus, cuius vertex L continet sectionem D E F, & est similis cono A B C.

C (in margin)

12. lib. 1.

Defin. 9.

Dico rursus, quod nullus alius conus similis cono A B C, cuius vertex sit in ea parte, in qua est L, præter iam dictum, continebit hanc eandem sectionem. Si enim hoc verum non est, contineat illam alius conus similis cono A B C, cuius vertex R in plano L E G; atque latera illius sint E R, R T. Quia angulus E R T æqualis est E L K, & eorum consequentes æquales inter se in eodem circuli segmento E L H existent, eo quod T R producta occurrit axi transuerso E H in H, & iungamus R O, & ex E educamus E T, quæ sit parallela coniunctæ rectæ lineæ O R; vnde angulus O R H æqualis est O R E) propter æqualitatem arcuum suorum, & sunt æquales duobus angulis R T E, R E T, ergo E R T est æquicrus, & angulus T R E æqualis est A B C; educatur iam R S parallela H E, tunc quadratum R S ad T S in S E eandem proportionem habebit, quàm E H inclinatus sectionis D E F ad E I erectum illius; eo quod sectionem D E F continet conus, cuius vertex est R; sed H E ad

d (in margin)

E I eandem proportionẽ habet, quàm quadratum B Q ad C Q in Q A:
estq; C Q æqualis Q A, atq; T S æqualis S E, & T S ad S E eandẽ pro- e
portionẽ habet, quã T R ad R H, seu quàm E V ad V H; igitur E V æqua-
lis est V H; quod est absurdum; propterea quo L O diameter, quæ ad illã
perpendicularis est, bifariam secat eam in N. Ostensum igitur est, non repe-
riri conum alium continentem sectionem D E F, præter superius exposi-
tum. Tandem supponamus, quadratum B Q ad quadratum Q A habere
minorem proportionem, quàm E H ad E I. Patet quadratum L P, nẽ- f
pe N E, seu O N in N L ad quadratum E P, nempe ad quadratum N
L, scilicet O N ad N L habere minorem proportionem, quàm H E ad
E I: ponamus iam O N ad N X, vt H E ad E I, & per X ducamus R
X Y parallelam H E, & iungamus E R, O R, & H R producatur ad T
quousque secet E T parallelam ipsi O R. Ostendetur (quemadmodum g
supra dictum est) quod E T R, B A C sunt isoscelia, & similia. Et quia
E H ad E I est vt O N ad N X; nempe vt O V ad V R, nempe vt O V
in V R, quod est æquale ipsi E V in V H ad quadratum V R; hæc au-
tem proportio componitur ex E V, nempe S R ad V R, nempe ad E S,
& ex proportione V H ad V R, nempe S R ad S T, ex quibus compo-
nitur proportio quadrati R S ad S T in S E; igitur quadratum R S ad E
S in S T eandẽ proportionem habet, quàm H E ad E I; & propterea
planum sectionis D E F in cono, cuius vertex est R, & illius trianguli
latera R E, R T, producit sectionem hyperbolicam, cuius inclinatus est
E H, & erectus E I; quare conus cuius vertex est R, continet sectionẽ D E
F, nec non continet illam alius conus, huic cono similis, cuius vertex
est Y; & hi duo coni sunt similes cono A B C, nec continet illam ter-
tius alius conus, qui similis sit cono A B C, nam (si hoc fieri possibile
est) contineat illam alius conus, cuius vertex Z, & punctum verticis
illius incidet in arcum E L H, & iungamus O Z, quæ secet H E in e: h

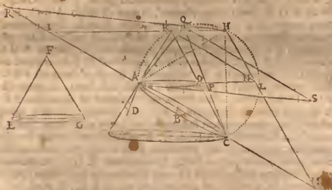
Inde

Inde demonstrabitur, quod H E ad E I habebit necessario eandem proportionem, quàm O *e* ad *e* Z; quod est absurdum, quia haberet eandem proportionem, quàm O N ad N X. Quapropter non continet illam tertius alius conus similis cono A B C.

Supponamus iam, quadratum B Q ad quadratum Q A maiorem proportionem habere, quàm H E ad E I. Dico, exhiberi non posse conum
i similem cono A B C, qui contineat sectionem D E F. Alioquin contineat illam conus, cuius vertex est R, & demonstrabitur, quod O V ad V R sit, vt H E ad E I, quæ habet minorem proportionem, quàm quadratum B Q ad quadratum Q A; quæ ostensa est eadem, quàm O N ad N L; ergo O V ad V R; nempe O N ad N X minorem, proportionem habet, quàm eadē O N ad N L, quod est absurdum. Non igitur continebit sectionem D E F conus similis cono A B C. Vt propositũ fuerat.

PROPOSITIO XXXI.

a Sit tandem sectio elliptica A B C, eiusque transuersus axis A C, & erectus A D, & in plano perpendiculariter erecto ad sectionis planum A B C, fiat super A C segmentum circuli, quod capiat angulum



æqualem angulo F, cumque bifariam diuidamus in H, & iungamus A H, C H, & ex H educeamus H I, quæ secet circulum in K, & occurrat subtensæ extra circulum in I; sitque H I ad I K, vt A C ad A D: & educamus H L M easdem conditiones habens; & iungamus C K, A K, Lem. 10. huius.
b ducaturque K N parallela A C, & A N parallela H I, quæ secet K C in O. Quia H I in I K (quod est æquale ipsi C I in A I ad quadratum I K) est vt A C ad A D; & proportio C I in A I ad quadratum I K componitur ex ratione C I ad I K, nempe K N ad N O (propter similitudinem

 tudinem

E I eandem proportionẽ habet, quàm quadratum B Q ad C Q in Q A: estq; C Q æqualis Q A, atq; T S æqualis S E, & T S ad S E eandẽ proportionẽ habet, quã T R ad R H, seu quàm E V ad V H; igitur E V æqualis est V H; quod est absurdum; propterea quo L O diameter, quæ ad illã perpendicularis est, bifariam secat eam in N. Ostensum igitur est, non reperiri conum alium continentem sectionem D E F, præter superius expositum. Tandem supponamus, quadratum B Q ad quadratum Q A habere minorem proportionem, quàm E H ad E I. Patet quadratum L P, nempe N E, seu O N in N L ad quadratum E P, nempe ad quadratum N L, scilicet O N ad N L habere minorem proportionem, quàm H E ad E I: ponamus iam O N ad N X, vt H E ad E I, & per X ducamus R X Y parallelam H E, & iungamus E R, O R, & H R producatur ad T quousque secet E T parallelam ipsi O R. Ostendetur (quemadmodum supra dictum est) quod E T R, B A C sunt isoscelia, & similia. Et quia E H ad E I est vt O N ad N X; nempe vt O V ad V R, nempe vt O V in V R, quod est æquale ipsi E V in V H ad quadratum V R; hæc autem proportio componitur ex E V, nempe S R ad V R, nempe ad E S, & ex proportione V H ad V R, nempe S R ad S T, ex quibus componitur proportio quadrati R S ad S T in S E; igitur quadratum R S ad E S in S T eandẽ proportionem habet, quàm H E ad E I; & propterea planum sectionis D E F in cono, cuius vertex est R, & illius trianguli latera R E, R T, producit sectionem hyperbolicam, cuius inclinatus est E H, & erectus E I; quare conus cuius vertex est R, continet sectionẽ D E F, nec non continet illam alius conus, huic cono similis, cuius vertex est Y; & hi duo coni sunt similes cono A B C, nec continet illam tertius alius conus, qui similis sit cono A B C, nam (si hoc fieri possibile est) contineat illam alius conus, cuius vertex Z, & punctum verticis illius incidet in arcum E L H, & iungamus O Z, quæ secet H E in e:

Inde

e

f

g

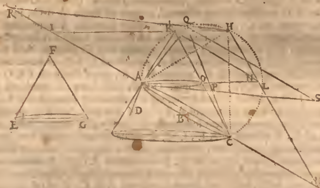
h

Inde demonstrabitur, quod H E ad E I habebit necessario eandem proportionem, quàm O *e* ad *e* Z; quod est absurdum, quia haberet eandem proportionem, quàm O N ad N X. Quapropter non continet illam tertius alius conus similis cono A B C.

Supponamus iam, quadratum B Q ad quadratum Q A maiorem proportionem habere, quàm H E ad E I. Dico, exhiberi non posse conum
i similem cono A B C, qui contineat sectionem D E F. Alioquin contineat illam conus, cuius vertex est R, & demonstrabitur, quod O V ad V R sit, vt H E ad E I, quæ habet minorem proportionem, quàm quadratum B Q ad quadratum Q A, quæ ostensa est eadem, quàm O N ad N L; ergo O V ad V R, nempe O N ad N X minorem, proportionem habet, quàm eadē O N ad N L; quod est absurdum. Non igitur continebit sectionem D E F conus similis cono A B C. Vt propositū fuerat.

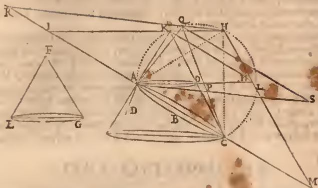
PROPOSITIO XXXI.

a Sit tandem sectio elliptica A B C, eiusque transuersus axis A C, & erectus A D, & in plano perpendiculariter erecto ad sectionis planum A B C, fiat super A C segmentum circuli, quod capiat angulum



æqualem angulo F, cumque bifariam diuidamus in H, & iungamus A H, C H, & ex H educamus H I, quæ secet circulum in K, & occurrat subtensæ extra circulum in I; sitque H I ad I K, vt A C ad A D: & educamus H L M easdem conditiones habens; & iungamus C K, A K, Lem. 10. huius.
b ducaturque K N parallela A C, & A N parallela H I, quæ secet K C in O. Quia H I in I K (quod est æquale ipsi C I in A I ad quadratum I K) est vt A C ed A D; & proportio C I in A I ad quadratum I K componitur ex ratione C I ad I K, nempe K N ad N O (propter similitudinem

tudinem



tudinem duorum triangulorum), & ex ratione A I, nempe K N ad I K, nempe ad A N (propter parallelas), & ex his duabus proportionibus componitur proportio quadrati K N ad A N in N O; ergo quadratum K N ad A N in N O eandem proportionem habet, quàm A C transuersus ad A D erectum; igitur planum, in quo est sectio A B C, in cono cuius vertex est K, & basis circulus, cuius diameter A O producit sectionem ellipticam, cuius transuersus est A C, & erectus A D: quare sectionem B A C continet; & quia angulus H K C, nempe A O K æqualis est H A C, & angulus C H A æqualis est C K A, remanet angulus H C A æqualis O A K; eritque H C A, quod simile est F E G, simile quoque O K A; quapropter O K A isosceleum, & simile est ipsi F E G; igitur conus, cuius vertex est K, similis est dato cono F E G, & quidem continet sectionem A B C, vti diximus. Similiter quoque ostendemus, quod eandem sectionem continebit alius conus, cuius vertex est L, si educantur A L, L C. Et alius conus, præter hos duos, iuxta hanc hypothesin non continebit illam: Alioquin contineat illam alius conus, cuius vertex sit Q, & triangulum A Q P: & ostendetur, quemadmodum supra dictum est, quod communis sectio plani, per axim illius coni ducti, erecti ad planum sectionis A B C, & plani sectionis est A C, & quod punctum verticis illius coni sit in circumferentia segmenti A H C, & sit Q, ducamus per H Q rectam H R, & iungamus C Q, A Q, & educamus A S parallelam H Q R, & Q S parallelam A C, erit Q A P triangulum illius coni, & est isosceleum, erit quadratum Q S ad A S in S P, vt C R in R A; quod est æquale ipsi H R in R Q ad quadratum R Q, nempe H R ad R Q; ergo H R ad R Q est, vt A C ad A D, quæ est, vt H I ad I K; ergo diuidendo, permutandoq; H K maior ad H Q minorem, eandem proportionem habebit, quàm K I minor ad R Q maiorem: & hoc est absurdum. Non ergo reperiri potest tertius conus, continens sectionem B A C. Et hoc erat ostendendum.

13. & 54. lib. 1.

Defin. 9. huius.

Defin. 8. huius.

c

d

e

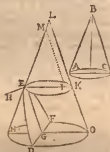
Notæ

Notæ in Proposit. XXIX.

a ET faciamus super E K triangulum simile triangulo A B C, &c. *Nimirum, fiat angulus K E L æqualis angulo A, & angulus L fiat æqualis angulo B.*

b Ergo L K, quæ est latus trianguli transeuntis per axim E G parallelũ est E G, &c. *Legi debet, vt in textu videre est. Hoc constat ex constructione; nam duo anguli alterni G E K, & L K E æquales sunt eidem angulo C.*

c Et propterea planum, in quo est sectio D E F producit in cono sectionem parabolicam, &c. *Quoniam planum circuli, cuius diameter E K perpendiculare est ad planum trianguli L E K: igitur si ducatur planum N F O æquidistans circulo E K secans planum D E F in recta linea D G F, erit quoque circulus, & perpendicularis ad planum trianguli per axim L E K: sed ex constructione planum D E F perpendiculare quoque erat ad idem triangulum per axim E L K; igitur D F communis sectio eorundem planorum perpendicularis quoque erit ad idem planum L N O, & efficiet angulos rectos cum diametro circuli N O, & cum E G, quæ in eodẽ plano existunt, & cũ illo conueniunt in puncto G; suntq; E G, & L O parallelæ: igitur planum sectionis D E F producit necessariò in cono L N O producto parabolam.* 11. lib. 1.



d Igitur H E ad E L, quæ est æqualis ipsi L K eamdem proportionem habet, quàm quadratum E K ad quadratum K L, &c. *Quoniam conus L E K similis est cono recto A B C erit quoque rectus: & propterea duo latera trianguli per axim E L, & L K æqualia sunt inter se, & ideo E K ad K L, atque ad E L eandem proportionem habebit, &c.*

e Et dico, quod sectio D E F non reperitur in alio cono simili cono A B C, cuius vertex sit ex parte plani sectionis præter hunc conum, &c. *Idest. Nullus alius conus rectus continebit eandem parabolam D E F, qui sit similis cono A B C, & vertex E parabole magis, aut minus recedat à vertice coni, quàm E L.*

f Ergo E M est indirectum ipsi E L, &c. *Quia D G basis sectionis conicæ perpendicularis esse debet ad G O, & ad G E, & ideo ad triangulum per axim vtriusque coni recti L E K, & M E I; & conueniunt plana eorundem triangulorum in E G axi conicæ sectionis geniti ab eis; ergo dicta triangula in eodem plano existunt per rectas E G, & G O ducto; & in vtroquè cono triangulorum per axes latera L K, & M I parallela sunt eidem axi E G paraboles: ergo L K, M I parallelæ sunt inter se, & anguli L, & M æquales sunt propter similitudinem triangulorum per axes in conis similibus: igitur L E, & M E sunt quoq; parallelæ, & conueniunt in E vertice paraboles; ergo in directum sunt constituta.*

Notæ in Proposit. XXX.

ITa vt non ſit proportio quadrati axis coni, B Q ad quadratum ſemi- a
diametri baſis illius vt C Q minor proportione figuræ ſectionis, &c. *Rurſus datus ſit conus rectus A B C, cuius axis B Q ſemidiameter circuli baſis ſit C Q, exhiberi debet alius conus ſimilis dato, qui datam hyperbolen D E F contineat; oportet autem, vt quadratum axis coni B Q ad quadratum ſemidiametri illius Q A non habeat maiorem proportionem, quàm habet axis tranſuerſus H E ad latus rectum E I.*

Et producamus L H ad E I occurret in K perpendiculari rectæ ad pun- b
ctum E linea H, &c. *Ideſt ſi ducatur recta linea E K in plano circuli H L E perpendicularis ad H E, ſeu parallela ipſi L N coniuncta recta linea H L ſecabit reliquam æquidiſtantium E K in K.*

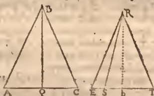
Quapropter K L E ſimile eſt A B C, quia æquicrus etiam eſt: ſi au- c
tem ponamus K L E triangulum coni, cuius vertex L, & planum trianguli illius erectum ad planum D E F; vtique planum, quod eſt in ſectione producit in cono ſectionē hyperbolicā, cuius axis E G, & inclinatus E H, &c. *Quoniam in duobus triangulis A B C, & E L K ſunt anguli verticales B, & L æquales inter ſe, cū externi M B C, & H L E æquales facti ſint; & angulus H L N æqualis ſit interno, & oppoſito K, & angulus N L E æqualis eſt alterno angulo L E K propter parallelas N L, E K, & quilibet eorū eſt medietas externi anguli H L E; ergo angulus K æqualis erit angulo L E K, & triangulū L E K erit iſoſceliū, ſed triangulum A B C per axim coni recti ductum eſt quoque iſoſcelum; igitur duo anguli ſupra baſim A, & C æquales ſunt inter ſe; erant autem prius verticales anguli B, & L æquales; igitur triangula A B C, & E L K æquiangula, & ſimilia ſunt. Ducatur poſtea recta linea L P perpendicularis ad baſim E K, quæ eam ſecabit bifariam in P, & ducatur planum per E K perpendiculare ad planum E L K, & in eo diametro E K fiat circulus, qui ſit baſis coni, cuius vertex L, & ducatur planum F D* a *æquidiſtans plano circuli E K; efficietur*

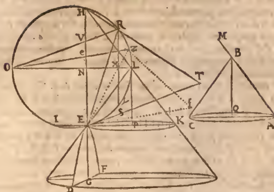
alius

alius circulus F D a perpendicularis ad planum trianguli per axim L E K; erat autem ex constructione planum hyperboles D E F perpendiculare ad idem planum per axim E L K; igitur duorum planorum communis sectio, qua sit F G D perpendicularis quoque erit ad planum trianguli L E K: & ideo efficiet angulos F G E, & F G a rectos, & G E H producta subtendit angulum externum trianguli conici E L K; quapropter planum D E F efficiet in cono E L K hyperbolen, cuius axis transuersus erit H E.

d Alias contineat illam alius conus similis cono A B C, sitque vertex eius R in plano L E G, & duo latera trianguli illius sint E R, T R; ergo angulus E R T æqualis est E L K, & est in circumferentia arcus E L H; ergo T R si producatur, occurret H: &c. *Sensus huius textus corrupti talis est: Si enim fieri potest, vt aliquis alius conus, vt E R T, qui similis sit cono A B C, vel E L K, contineat eandem hyperbolam D E F, & conorum vertices R, & L ad easdem partes tendant, erunt duo plana triangulorum per axes conorum ducta perpendicularia ad planum sectionis D E F; alias E G non esset axis hyperbole D E F; Et quia coni supponuntur similes erunt quoque triangula per axes E L K, & E R T similia inter se; & ideo anguli verticales E L K, & E R T æquales inter se erunt, atque subsequentes anguli E L H, & E R H æquales quoque inter se erunt, & subtendunt commune latus transuersum H E; igitur duo anguli E L H, & E R H in eodem circuli segmento consistunt. Textus igitur corrigi debebat vt dictum est.* ex Def. 8.

e Atque T S æqualis est ipsi E, & T S ad S E est, vt T R ad R H, quæ est vt E V ad V N; ergo E V æqualis est V H, &c. *In duobus triangulis isoscelijs inter se similibus A B C, & E R T ab æqualibus angulis verticalibus A B C, & E R T ducuntur rectæ lineæ B Q, R S secantes bases in Q, & S: estque quadratum R S ad rectangulum E S T, vt quadratum B Q ad rectangulum A Q C, & secatur A C bifariam in Q; ostendendum est E T in duas partes æquales in S quoque secari. Si enim hoc verum non est E T in alio puncto bifariam diuidetur vt in* b *iungaturque R* b. *Quoniam à verticibus triangulorum A B C, & R E T isoscelium ducuntur recta linea B Q, R* b *diuidentes bases bifariam in Q,* b*, ergo anguli ad Q, &* b *sunt recti, & erant anguli A, & E æquales (propter similitudinem eorundem triangulorum) igitur triangula A B Q, & E R* b *similia sunt, ideoq; B Q ad Q A erit vt R* b *ad* b *E, & quadratū B Q ad quadratum Q A erit vt quadratū R* b *ad quadratū* b *E; erat autem quadratum R S ad rectangulum E S T vt quadratum B Q ad quadratum Q A; ergo quadratum R* b *ad quadratum* b *E eandem proportionem habet, quàm quadratum R S ad rectangulum E S T; estque quadratum R* b *minus quadrato R S (cum perpendicularis R* b *minor sit quàm R S) quarè quadratum ex* b *E semisse totius E T minus erit rectangulo E S T sub segmentis inæqualibus eiusdem E T contento; quod est absurdum: quarè necessario E T bifariam secatur in S. Postea propter parallela R S, & H E, vt T S ad S E ita erit T R ad R H; & propter parallelas R V, & E T erit E V ad V H, vt T R ad R H, seu T S ad S E: ostensa autem fuit T S æqualis S E; igitur E V æqua-*





V æqualis est V H, quod est absurdum.

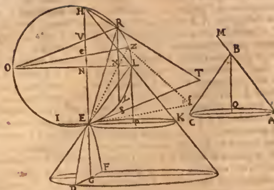
Patet quadratum L P nempe N E, seu O N in N L ad quadratum E P, nempe ad quadratum N L, scilicet O N ad N L habere minorem proportionem, quàm H E ad E I: ponamus iam O N ad Z X, vt H E ad E I; & per X ducamus X R, & iungamus E R, &c. *Supposita constructione prioris casus, quandò conus rectus E L K factus est similis cono A B C quadratum L P ad quadratum E P habebat eandem proportionem, quàm O N ad N L, seu quàm quadratum B Q ad quadratum Q A: modò in hac altera suppositione conceditur quadratum B Q ad quadratum Q A habere minorem proportionem, quàm E H ad E I; igitur O N ad N L minorem proportionem habebit, quàm H E ad E I; & fiat O N ad N X vt H E ad E I, erit N X minor quàm N L, & ideò punctum X intra circulum cadet, & per X ducta R X Y parallela H E; vtique secabit circulum in duobus punctis, vt in R, & Y. Quod verò recta R X Y duci debeat parallela ipsi H E, non quomodocunque, patet ex contextu sequenti, nam debent O X, O R secari in N, & V proportionaliter, quarè textus debuit omnino corrigi.* f

Ostendetur, quemadmodum dictum est, quod E T R, & A B C sunt isoscelia, & similia, &c. *Quoniam arcus circuli E O, & O H æquales sunt inter se ex constructione, erunt anguli E R O, & O R H æquales inter se, & propter parallelas O R, & E T est angulus O R E æqualis alterno T E R; atque externus H R O æqualis est interno, & opposito R T E; igitur duo anguli R E T, & R T E æquales sunt inter se; & propterea triangulum E R T erit isoscelium. Rursus quia duo anguli E L H, E R H in eodem circuli segmento constituti æquales sunt inter se, & erat ex constructione angulus M B C æqualis angulo H L E; igitur anguli H R E, & M B C æquales sunt inter se, & ideo consequentes anguli verticales E R T, & A B C æquales erunt inter se, est quoque triangulum A B C per axim coni recti isoscelium igitur duo triangula E R T, & A B C similia sunt inter se. Et quia vt dictum est O N ad N X eandem proportionem habet, quàm H E ad E I, atque propter parallelas V N, & R X est O V ad V R vt O N ad N X, & sumpta cõmuni altitudine V R erit rectan-* g

rectangulum O V R ad quadratum V R, vt H E ad E I: est verò rectangulum H V E aquale rectangulo O V R (propterea quod duæ rectæ lineæ O R, H E se se secant intra circulum in V) igitur rectangulum H V E ad quadratum V R eandē proportionē habet quàm H E ad E I; cumq; proportio rectanguli H V E ad quadratum V R composita sit ex duabus rationibus, ipsius E V ad V R, seu R S ad S E, (propter parallelogrammum V E S R), & ex proportione H V ad V R, quæ eadem est proportioni ipsius R S ad S T (propterea quod triangula H V R, & R S T similia constituuntur ab æquidistantibus H V, R S, & V R, S T) quapropter duæ proportiones R S ad S E, & R S ad S T componentes proportionem quadrati R S ad rectangulum E S T eædem sunt rationibus, ex quibus componitur proportio rectanguli H V E ad quadratum V R; & ideo quadratum R S ad rectangulum E S T eandem proportionem habebit, quàm rectangulum H V E ad quadratum V R, seu eandem quàm habet H E ad E I; igitur si fiat conus, cuius vertex R, & basis circulus diametro E T, cuius planum perpendiculare sit ad planum trianguli E R T, erit triangulum E R T isoscelium per axim prædicti coni extensum, atq; ad ipsum sectionis D E F planum est quoque perpendiculare, & eius axis G E subtendit angulum E R H, qui deinceps est angulo verticis; igitur planum D E F in cono E R T generat hyperbolen, cuius axis inclinatus est E H, & erectus E I: & propterea conus E R T comprehendit hyperbolen D E F. Rursus si recta R X producatur quousque secet peripheriam circuli L E ex altera parte in puncto Y; atque denuò coniungantur rectæ lineæ E Y, & H Y, quæ extendatur quousque conueniat cum recta linea ex puncto E parallela ipsi O Y in puncto aliquo, quod concipiatur esse d; fieri poterit alius conus (cuius vertex Y, basis circulus diametro E d erectus ad planum trianguli) similis cono E R T, siue A B C: Ostendetur (sicuti modo dictum est, quod idem planum H D F efficiet in cono Y d E eandem hyperbolen D E F.

h Inde demonstrabitur quod E H ad E I necesse est, vt habeat eandem proportionem, quàm O *e* ad *e* Z: & hoc est absurdum, &c. *quia conus Z E f continet hyperbolen D E F necessariò eius axis transuersus E H subtendet angulum H Z E, qui deinceps est anguli verticis trianguli per axim; & propter similitudinē conorū rectorum, sunt triangula per axes A B C, E R T, & E Z f similia inter se, & anguli verticales B, Z, & R aquales erunt inter se; ideo consequentes anguli M B C, & H R E, nec non H Z E aquales erunt inter se, & subtenduntur ab eadem recta linea H E; ergo in eodem circuli segmento consistunt: & propterea punctum Z in circuli peripheria H Z E cadit. Postea (vt in propositione 53. primi libri, & in hac eadem propositione demonstrauit Apollonius) constat quod H E ad E I habet eandem proportionem, quàm O e ad e Z; & prius O V ad V R erat vt H E ad E I; ergo O V ad V R eādem proportionem habet quàm O e ad e Z; sed quia punctum Z non cadit in R, neque in Y alias conus E Z f non esset alius à præcedentibus E R T, & E Y d; ergo O e ad e Z non habet eandem proportionem, quàm O V ad V R, quod est absurdum.*

i Et demonstrabitur quod O V ad V R sit vt H E ad E I, &c. *Repetatur denuo constructio primi casus huius propositionis, vt fiat conus rectus L E K similis cono A B C, tunc quidem quadratum L P ad quadratum E P habebit eandem proportionem, quàm O N ad N L, seu quàm quadratum B Q ad*

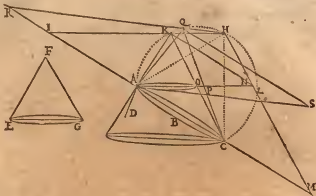


quadratum Q A; sed in hac postrema suppositione conceditur quadratum B Q ad quadratum Q A habere maiorem proportionem, quàm H E ad E I; igitur O N ad N L maiorem proportionem habebit, quàm H E ad E I; sed quia conus E R T ponitur continere sectionem D E F: habebit O V ad V R eandem proportionem, quàm H E ad E I (vt ex 53. primi deducitur, & in hac propositione denuò factum est): igitur O N ad N L maiorem proportionem habebit quàm O V ad V R; ostensa autem fuit O N ad N X, vt O V ad V R; ergo O N ad N L maiorem proportionem habebit, quàm O N ad N X: quod est absurdum, nam N X minor est, quàm N L.

Notæ in Proposit. XXXI.

DEinde sit sectio elliptica A B C, & transuersa illius A C, & erectus A D, & circunducamus super A C in plano erecto ad sectionis planum A B C segmentum circuli, quod capiat angulum æqualem angulo F: &c. *Rursus conus exhiberi debet similis cono dato E F G, qui datam ellipsim A B C contineat, sitque axis transuersus ellipsis C A, eiusque latus rectum A D.* a

Quia H I in I K, quod est æquale ipsi C I in I A, ad quadratum I A est, vt A C ad A D, & C I in A I ad quadratum I K nempe K N ad N O propter similitudinem duorum triangulorum, & ex A I, nempe N K ad I K nempe A N vt parallelas constituamus lineas, & ex his duabus proportionibus componitur proportio quadrati N K ad A N in N O, &c. *Sensus huius textus valdè corrupti hic est. Quia ex constructione H I ad I K erat vt C A ad A D, & sumpta communi altitudine I K, erit rectangulum* b



lum H I K ad quadratum I K, vt H I ad I K seu vt C A ad A D; estque rectangulum C I A aquale rectangulo H I K; igitur rectangulum C I A ad quadratum I K eandem proportionem habet, quàm C A ad A D; componitur verò proportio rectanguli C I A ad quadratum I K ex duabus proportionibus laterum C I ad I K, & A I ad I K: & propter parallelas N O, I K, atque K N, & C I, & latus commune C O K duo triangula C I K, & K O N similia sunt; igitur K N ad N O est, vt C I ad I K; & quia in parallelogrammo I N latera opposita sunt aqualia K N ad N A eandem proportionem habebit quàm A I ad I K; quapropter dua rationes K N ad N O, & K N ad N A componunt proportionem quadrati K N ad rectangulum A N O, qua eadem est proportioni rectanguli C I A ad quadratum I K; & propterea quadratum K N ad rectangulum A N O eandem proportionem habebit, quàm A G ad A D. Si igitur fiat conus, cuius vertex K basis circulus diametro A O descriptus, cuius planum perpendiculare sit ad planum A K C; atque per rectam A C aquidistantem ipsi K N planum ducatur perpendiculare ad idem planum A K C generabitur ellipsis, cuius axis transuersus erit A C, & latus rectum A D. Textus igitur corrigi debere ex dictis manifestum est.

C Et quia angulus H K C nempe A O K æqualis est H A C, & angulus C H A æqualis est C K A remanet angulus H C A æqualis O A K erit H C A simile F E G simile quoque O K A; ergo, &c. *Quoniam ex constructione segmentum A H C capax est anguli aqualis angulo F erit angulus A H C aqualis angulo F; & quia peripheria A H C secta est bifariam in H; ergo subtensa latera A H, & H C aqualia sunt: & propterea triangulum A H C isoscelium, & simile erit triangulo E F G; propterea quod anguli verticales aquales sunt inter se; sunt verò duo anguli A H C, & A K C in eodem circuli segmento; ergo aquales sunt inter se; pariterque duo anguli C A H, & C K H in eodem circuli segmento constituti, aquales sunt inter se, & propter paralle-*

 las

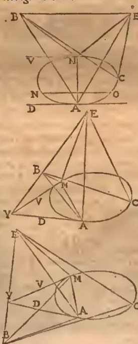
las A O, K H ſunt anguli alterni A O K, & H K O æquales inter ſe; igitur
angulus A O K æqualis erit angulo C A H; & propterea in duobus triangulis
K A O, & H C A tertius angulus A C H æqualis erit tertio angulo K A O,
& propterea triangulum K A O iſoſcelium, & ſimile erit triangulo H A C,
ſiue F G E; igitur conus, cuius vertex K baſis circulus A O perpendicularis
ad planum trianguli A K O erit conus rectus, & ſimilis cono E F G dato.

Alioquin contineat illum conus alius, cuius vertex ſit Q, & triangu- d
lum Q A P, & oſtendetur quemadmodum dictum eſt, quod planum
tranſiens per axim illius coni erectum ad planum ſectionis A B C ſectio
communis cum plano ſectionis eſt A C, & quod punctum verticis illius
coni ſit in circumferentia ſegmenti A H C, &c. Quia ſupponitur, quod
conus Q A P ſimilis cono E F G contineat ellipſim A B C, cuius axis tranſuer-
ſus C A, & latus rectum A D; igitur triangulum per axim coni ductum Q
A P, nedum ſimile erit triangulo E F G, ſed etiam perpendiculare erit ad pla-
num ellipſis A B C, & propterea conſiſtet in plano circularis ſegmenti A H C
pariter erecti ad planum A B C, per idem axim A C extenſum, & eſt angu-
lus A Q C æqualis angulo verticali F propter ſimilitudinem duorum triangu-
lorum, & ex conſtructione primæ partis huius propoſitionis, eſt ſegmentum A
H C capax anguli æqualis angulo F; ſecaturque bifariam in H; igitur angulus
A Q C æqualis ipſi F in peripheria ſegmenti A H C exiſtit. Ducatur poſtea
Q S parallela lateri tranſuerſo ellipſis A C, quæ ſecet baſim trianguli per axim
Q A P productam in S, & à puncto H bipartitæ diuiſionis ſegmenti A H C
coniungatur recta linea H Q producaturq; quouſq; occurrat rectæ lineæ C A in R.
Quoniã duo anguli A H C, & A Q C in eodẽ circuli ſegmento conſtituti æqua-
les ſunt inter ſe; pariterq; duo anguli C A H, & C Q H in eodẽ circuli ſegmento
exiſtentes ſunt æquales, & eſt angulus A P Q æqualis angulo P A Q in triangu-
lo iſoſcelio Q A P; & angulus P A Q æqualis angulo C A H in triangulis ſimi-
libus; igitur angulus A P Q æqualis eſt alterno angulo P Q H; & propterea
recta

recta linea H R parallela est ipsi A S; & erat prius Q S parallela ipsi C R, & recta linea C P Q est communis; igitur triangula C R Q, & Q S P similia sunt, & spatium R S parallelogrammum est; eritque vt prius dictum est proportio quadrati Q S ad rectangulum A S P eadem proportioni rectanguli C R A ad quadratum R Q; est verò quadratum Q S ad rectangulum A S P, vt ellipsis axis transuersus C A ad eius latus rectum A D, propterea quod conus A Q P supponitur continere ellipsim A B C; igitur rectangulum C R A ad quadratum R Q eandem proportionem habet, quàm C A ad A D; est verò rectangulum H R Q æquale rectangulo C R A; igitur rectangulum H R Q ad quadratum R Q seu H R ad R Q eandem proportionem habebit, quàm C A ad A D; sed in priori casu facta est H I ad I K in eadem proportione, quàm C A ad A D; igitur H R ad R Q eandem proportionem habebit quàm H I ad I K.

e Ergo diuidendo H K maior ad minorem K I erit vt minor H Q ad maiorem Q R, &c. *Idest quia H R ad R Q est vt H I ad I K, & diuidendo H Q ad Q R eandem proportionem habebit quàm H K ad K I, & permutando H Q ad H K erit vt Q R ad K I: quod est absurdum; quandoquidem in circulo subtensa H Q à centro remotior minor est, quàm H K, at exterius comprehensa Q R maior est, quàm K I. Quapropter fieri non potest, vt aliquis alius conus A Q P præter iam dictos contineat ellipsim A B C, & sit similis dato cono E F G. Textus ergo confusus corrigi debebat.*

Ad propositionem 77. libri quinti egi de contactibus circulorum, & sectionum conicarum, eorumque admirabilia symptomata à nemine adhuc quod sciam excogitata patefeci, non tamen prædicta disceptatio omnino perfecta, & absoluta fuit: itaque iuxta loci exigentiam hic afferam coronidis loco eiusdem doctrinæ complementum.



PROP. 15. Addit.

Per rectam lineam coniungentem vertices duorum conorum eandem basim habentium ducere duo plana vtrumque conum tangentia: oportet autem rectam lineam vertices coniungentem extra peripheriam circuli communis basis cadere.

Circulus A M C sit communis basis duorum conorum, quorum vertices B, & E, & coniuncta recta linea B E extra peripheriam circuli A M C cadat: duci debent duo plana tangentia vtrasque conos per eandem rectam lineam B E extensa. Et primo recta linea E B plano circuli A M C æquidistet, & ducto quolibet plano per E B circulum secante in recta linea N O erit ipsa N O parallela E B; tunc ducatur diameter A M perpendicularis ad N O, & per A, & M ducantur A D, M V tangentes circulum, siue perpendiculares ad idem

idem diametrum M A; erunt igitur tangentes A D, & M V parallelæ eidem N O, erat autem E B parallela ipsi N O; igitur duæ circulum tangentes A B, & M V parallelæ sunt idem E B; & propterea A D, & E B in eodem sunt plano, vtrumque conum tangente, cum per vertices E, & B ducatur, & per A D basis circulum tangentem. Eadem ratione M V, & E B in eodem plano vtrumque conum tangente existent. Si verò recta E B plano circuli non æquidistat producta alicubi planum eiusdem circuli secabit extra circulum ipsum, vt in Y, & tunc quidem à puncto Y extra circulum posito ducantur duæ contingentes Y A, & Y M. Manifestum est, rectas lineas A Y, B E in eodem plano iacere: transit verò prædictum planum per vertices B, & E duorum conorum, atque per Y A tangentem circulum basis communis; igitur planum A E B vtrumque conum continget. Eodem modo planum E B M ex altera parte vtrumq; conum tanget. Et hoc erat faciendum.

PROP. 16. Addit.

In qualibet conisectione H A I cuius diameter A L non sit axis, per eius verticem A aliam conisectionem in eodem plano describere, quæ priorem abscindat, atque eadem recta linea vtramq; sectionem tangat in puncto mutuæ earum abscissionis.

Sicut in constructione prop. 11. & 12. addit. factum est, describatur conus B A C comprehendens sectionem H A I, cuius vertex B basis circulus A M C per sectionis verticem A ductus, & triangulum per axim B A C efficiat diametrum A L: & in duobus circulis æquidistantibus A C M, & in eo, qui per sectionis basim H I ducitur idē planum sectionis conicæ designet duas parallelas A D, H I, & planum trianguli per axim efficiat circulorũ diametros C A, & eum, qui per L ducitur æquidistantes inter se: ergo sicuti basis H I perpendicularis est ad circuli diametrum per L ductam, seu ad basim trianguli per axim, ita D A

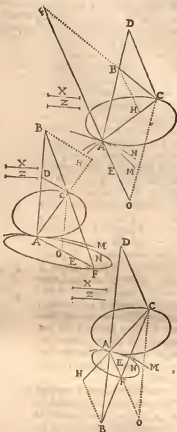
perpendicularis eſt ad circuli diametrum C A, & propterea A D, planorum H A I, & A C M communis ſectio, tanget circulum A C, & ideo ſuperficiem ipſam conicam, & ſectionem in ea exiſtentem continget; & diameter A L non erit perpendicularis ad tangentem, ſeu ordinatim applicatam A D per verticem A, alias A L eſſet axis, quod non ponitur. Deinde in plano D A B ex A ducatur recta linea A E perpendicularis ad A D ſupra, vel infra circulum, & vertice quolibet puncto E ſumpto in recta linea A E, & baſi circulo A C M fiat alter conus E A C, in cuius ſuperficie planũ D A H I deſignet ſectionẽ F A G, & in ea triangulum per axim E A C efficiat diametrum A K: Et quia eadem recta linea D A perpendicularis eſt ad A C, atque ad A E ſe ſecantes in A; ergo D A perpendicularis eſt ad planum C E A, atque planum D A C extenſum per perpendicularem D A, erit quoque perpendiculare ad planum trianguli per axim C E A, quare triangulum per axim efficiet diametrum A K, quæ erit axis ſectionis F A G, atque D A perpendicularis erit ad axim A K exiſtentem in plano C E A, ad quod D A eſt perpendicularis, & cum ea conuenit: quare D A ordinatim ad axim applicata per verticem A tanget ſectionem F A G, quæ 32. lib. 1. *prius in eodem puncto A tangebat ſectionem H A I in eodem plano exiſtentem; & propterea eadem recta A D vtramque ſectionem tangit in puncto A. Poſtea coniungatur recta linea B E, & quia recta linea B A, A D, A E ſunt in eodem plano tangente vtrumque conum (cum per vertices B, & E, atque per D A contingentem circulum baſis communis ducatur) & E A, & B A angulum conſtituunt, cum E A poſita ſit perpendicularis ad D A; at B A ad eandem ſit inclinata, & exiſtunt in eodem plano; ergo recta B E parallela eſt, aut ſecat contingentem D A extra circulum vt in D. Poterit igitur ex propoſ. 15. additarum duci per rectam B E planum aliud B E M V vtrumq; conum contingens,*

& per

& per rectam B E extendatur aliud planum E N O B inter duo plana contingentia prope verticem A vbicumq; cadens, quod secet vtrumque conum, & circulum basis in recta linea N O, & superficies duorum conorum in lateribus B N Q, E N, B O, E O R, quarum B N occurret semisectioni A H in quolibet eius puncto Q prope verticem A, eo quod portio A H, & peripheria A N C excepto puncto eius A tota inter duo plana conos tangentia intercipiuntur; & eadem ratione E O occurret semisectioni A G in quolibet eius puncto R vltra verticem A ad partes G. Et quoniam in eodem plano trianguli E N B (scilicet plani B N O E secantis vtrumque conum) à puncto E ducitur recta linea E O intra angulum N E B; ergo vlterius producta secabit latus B N subtendentem angulum N E B inter puncta N, & B, vt in X, & propterea recta linea N X intra triãgulum E N O, & ideo intra conum E A C intercepta erit; similiter recta linea O X intra triangulum B N O, & intra conum B A C interclusa erit: quare quodlibet aliud punctũ Q lateris conici B N citra, vel vltra interclusã portionẽ N X cadet necessario extra superficiem coni E A C, & ideo quodlibet punctum Q in productione lateris coni B N sumptum & in semisse sectionis conicæ H A prope verticem A cadet extra semissem sectionis F A, quæ in superficie coni E A C existit, & ad easdem partes vergit. Pari modo quodlibet aliud punctum R lateris conici E O citra, vel vltra interclusam portionẽ X O cadet extra superficiem coni B A C, & ideo quodlibet punctũ R sumptum in medietate sectionis conicæ A G prope verticem A cadet extra medietatem sectionis A I, quæ in superficie coni B A C existit, & ad easdem partes vergit. Igitur sectio H A I abscindit conisectionem F A G in vertice communi A, vbi ambo tanguntur ab eadem recta linea A D. Quod erat faciendum.

PROP. 17. Addit.

Si fuerint quotcunque coni ſuper circulum communem baſis deſcripti, habentes latus commune indefinitè extenſum in triangulis per axes ad baſes perpendicularibus, atque per terminum lateris communis ducatur planum efficiens coni ſectiones tangentes baſim: habebunt illæ latera recta æqualia inter ſe, eritquè ſectio ſingularis, ſi fuerit parabole, vel circulus: ſi verò fuerit ellipſis, aut hyperbole erunt infinitæ.

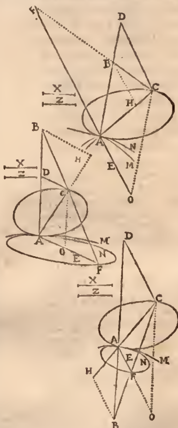


Sit conus A D C ſingularis, & A B C ſit multiplex, habentes circulum A C baſeos communem, & latus A B D productum commune ſumptum ſit in triangulis per axes conorum perpendicularibus ad circulum baſis B C, atque à termino A ducatur planũ ſecans circuli A C planum in recta linea, quæ perpendicularis ſit ad diametrum C A, quod efficiat in cono quidem A B C ſectionem A N, cuius latus rectum ſit X, & latus tranſuerſum A F: in cono verò A D C efficiat ſectionem A M, cuius latus rectum Z, & diameter communis A E; ſitque ſectio A N hyperbole, circulus, aut ellipſis circa axim maiorem, aut minorem; Sectio verò ſingularis A M in cono D A C ſit parabole; & ducatur B H parallela diametro ſectionis A E ſecans circuli diametrum A C in H: & ducatur C O parallela D A ſecans A E in O. Dico latus rectum Z paraboles A M æquale eſſe lateri recto X cuiuſlibet alterius ſectionis A N; & ſupponantur tres parabolæ A M inter ſe æquales earumq; latera recta Z æqualia, quæ in tribus figuris apponẽtur, vt confuſio euitetur. Quoniam vt latus rectum X ad tranſuerſum A F ſectionis A N, ita eſt rectangulum A H C ad quadratum B H: hæc verò proportio componitur ex ratione C H ad H B, & ex ratione A H ad H B: eſtque C A ad A F, vt C H ad H B (propter parallelas F A, H B, & ſimilitudinem triangulorum) & vt A H ad H B, ita eſt A C ad C D, ſeu ad

12. & 13 lib. 1.

A O (cum C D , & H B sint parallelæ, atque D O sit parallelogrammum) componunt verò hæ duæ proportiones rationem quadrati C A ad rectangulum F A O : ergo vt rectangulum A H C ad quadratum H B ; ita est quadratum C A ad rectangulum F A O , & propterea vt X ad A F , ita erit quadratum A C ad rectangulum F A O , sed vt F A ad A D (sumptis æqualibus altitudinibus A O , C D) ita est rectangulum F A O ad rectangulum A D C ; quare ex æquali X ad A D erit vt quadratum A C ad rectangulum A D C ; tandem vt Z latus rectum parabolés A M ad D A ita est quadratum A C ad rectangulum A D C ; igitur X , & Z ad eandem D A habent eandem proportionem quàm quadratum A C ad rectangulum A D C , & propterea latera recta X , & Z æqualia sunt inter se . Et quoniam in quolibet casu sectionis conicæ A N latus rectum X semper æquale est Z lateri recto vnius eiusdemq; parabolés A M ; ergo latera recta X reliquarum omnium sectionum æqualia sunt inter se , licet sectiones illæ sint inæquales , & habeant latera trāsuersa inæqualia , imò neque eiusdem speciei sint . Quod erat propositum .

11. lib.1.



Admiratione dignum præcipuè est in hac propositione , quod si sectio A N fuerit circulus , vnicus tantummodò erit ; nam circuli latus rectum X æquale erit eius diametro, seu axi transuerso A F ; estque semper latus rectum eiusdem mensuræ , vt ostensum est ; igitur circuli diameter F A idem semper erit ; & propterea circulus , qui à tali plano generari potest singularis erit , nimirum ille , qui in vnico cono A B C efficit triangula per axim similia , & subcontraria B A C , & B F A . Manifestum quoq; est parabolem A M singularem esse , nam supponitur idem circulus basis A C , & in plano per axim coni cōmune latus A D B semper eosdē angulos D A E , & D A C efficere conceditur ; igitur vt sectio A M sit parabole necessariò recta à puncto C duci debet parallela diametro parabolés A E ; cum ergo in triangulo per axim D A C detur basis A C inuariabilis quia circulus vnicus supponitur eiusque

què anguli D, & D A C; dabitur quoq; eius species semper eadem, immo triãgulum per axim inuariabile erit, qui semper eodem modo inclinatur ad circulum basis C A: & propterea conus D A C semper idem erit, & eodem modo sectus, vnde sectio paraboles A M eadem semper omnino erit, habens idem latus rectum Z. In hyperbole verò, aut ellipsi latera C B possunt supra, vel infra C D parallelam ipsi A E à puncto C ductam, extendi, & sic efficientur transuersa latera A F inaequalia inter se, cumque coni sectiones A N habeant latera recta X aequalia inter se, latera verò transuersa A F inaequalia, & hyperbolarum commune latus rectum habentium illa maior est, cuius axis transuersus est minor: & duarum ellipsium commune latus rectum habentium, illa maior est cuius axis transuersus est maior; igitur ellipses, aut hyperbole, quae in conis praedicta lege constructis describuntur non singulares sed infinita esse possunt. Vbi notandum est, quod ellipses possunt esse ea quae ad maiores, aut ad minores axes adiacent. Pari modo constat quod si in conis superius expositis fiant sectiones conicae constituentur ad eundem axim quinque sectiones commune latus rectum habentes se se in eodem vertice tangentes; & earum intima erit ellipsis, quae ad axim minorem adiacet, & non erit vnica, sed multiplex, & omnes cadent intra circulum, circulus verò intra ellipsim ad axim maiorem accomodatam cadet, hac verò intra parabolen constituetur, & inter circulum, & parabolen infinitae ellipses se in eodem puncto verticis tangentes collocari possunt. Tandem parabole comprahendetur ab infinitis alys hyperbolis se se in eodem puncto tangentibus. Maurol. 2. lib. 5. Conic. Maurol. prop. 28. lib. 5. Conic.

PROP. 18. Addit. ex 51. 52. lib. 5.

Si in qualibet comsectione B A C ducatur breuisecans singularis D A, tunc qualibet alia comsectio M A N, cuius axis sit eadem breuisecans, & A L semissis erecti eius minor sit eadem singulari breuisecante A D. Dico sectionem M A N interius contingere priorem sectionem B A C in A.

Quia A L minor est, quàm A D sumi poterit recta A O maior quidem quàm A L, & minor quàm A D, & centro O internallo O A describatur circulus P A Q. Manifestum est, quod circulus P A Q sectionem M A N exterius continget in A, at circulus P A Q interius priorem sectionem B A C tanget, vt ostensum est, igitur coni sectio M A N continget sectionem B A C interius in A. Quod erat ostendendum. Maurol. pr. 4. 7. 10. 14. lib. 5. Conic. Prop. 12. addit. lib. 5.

PROP. 19. Add.

Iisdem positis si sectionis T A V, cuius axis A D semissis eius erecti fuerit A R maior quàm D A, quae est singularis breuisecans sectionis B A C. Dico, quod T A V exterius contingit sectionem B A C in A.

Quoniam A R maior ponitur quã A D sumi poterit recta A X minor quidem, quàm A R, sed maior quã A D, & centro X interuallo X A describatur circulus I A S. Patet (ex demonstratis superius) circulum I S extrinsecus tangere conisectionem B A C; at sectio T V extrinsecus circulum I S tangit in eodem puncto verticis A, ergo sectio T V extrinsecus tangit conisectionem B A C in eodem puncto A. Quod erat ostendendum.

ex pr. 14. addit. lib. 5. Maurol. pr. 3. 6. 9. 13. lib. 5. Conic.

PROP. 20. Addit. ex 16. addit. huius.

Si in eodem plano circulus F A G secuerit conisectionem H A I in puncto A quod non sit vertex axis eius, atque eadem recta linea D A contingat circulum, & sectionem in eodem puncto A; Dico quod quælibet alia conisectio S A Z in eodem plano cum illis posita cuius axis sit idem circuli diameter A K habens T semissem lateris recti axis æqualẽ radio circuli F A G: secabit quoque eandem conisectionem H A I in eodem puncto A; atque continget eandem rectam lineam A D in A.

Describantur (vt in 16. additarum huius libri factum est) duo coni A B C, Scalenus comprehendens sectionem H A I, & conus rectus E A C comprehendens circularem subcontrariam sectionem F A G, quorum basis communis sit circulus

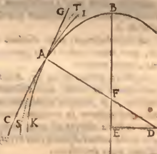
circulus A M C, ita vt idem planum per vertices conorum B, & E, & per A D contingentem eundem circulum basis extensum tangat vtrumque conum in lateribus A B, & A E. Postea si S A Z optatur parabole ducatur in plano A E C ex C recta C N parallela A K axi sectionis F A G; si verò S A Z desideratur hyperbole, aut ellipsis producatur axis A K in directum extra aut intra sectionem, & in recta linea K A O secetur portio A O aequalis lateri transuerso sectionis S A Z, coniungaturque recta linea C O, secans E A in N (eo quod axis K A in plano A E C erecto ad circulū A M C, existit) & vertice N fiat alter conus N C A. Manifestum est in cono recto E A C designari ab eodem plano D A K circulum F A G, at in cono recto N A C efficietur alia sectio conica circa communem axim A K, quae se se mutuo, & eandem rectam lineam D A tangent, in communi vertice A, atque circuli F A G, & sectionis genita in cono N A C duo latera recta erunt aequalia, & propterea sectionis genitae in cono N A C semilatus rectum aequale erit radio circuli Y seu dimidio erecti sectionis H A I, & si habuerit latus transuersum erit aequale A O; ergo sectio genita in cono N A C, & sectio S A Z circa communem axim A K habent latus rectum commune duplum ipsius Y, & etiam commune latus transuersum A O: Quare sectio genita in cono N A C, & S A Z aequales sunt inter se, & congruentes; quapropter idem planum D A K, quod efficit in cono Scaleno B A C sectionem H A I, designat quoque in cono recto N A C sectionem S A Z: habent verò hi duo coni circulum basis communem, & idem planum per contingentem A D, & per vertices B, & N ductum vtrumque conum tangit; igitur (vt demonstratum est in 16. Addit. huius) sectio conica S A Z abscindet aliam sectionem H A I, & ambae tanguntur ab eadem recta linea D A in eodem puncto mutuae abscissionis A. Quod erat propositum.

Prop. 17. addit. huius.

10. huius.

PROP. 31. Addit.

Si in qualibet coniSectione B A C ducatur breuisecans singularis D A, & quaelibet alia coniSectio I A K, cuius axis sit D A, atque semissis lateris recti axis sectionis I A K sit aequalis breuisecanti D A. Dico, sectionem I A K contingere eandem rectam lineam G A, quam tangit sectio B A C, & abscindere reliquam coniSectionem in eodem puncto A.

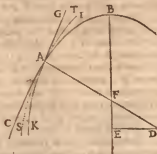


Describatur centro D interuallo D A circulus T A S constat (ex prop. 10. additarum libri quinti) circulum T A S secare coniSectionem B A C in A, cumque circa eundem axim D A ponantur circulus T A S, atque coniSectio I A K, cuius lateris recti semissis aequalis est D A radio circuli T A S, ergo coniSectio I A K abscindit coniSectionem B A C in eodem puncto A, in quo secatur à circulo T A S, & tanguntur ab eadem contingente G A in puncto A. Quod erat, &c.

20. addit. huius.

Sectionum

PROP. 22. Addit. *Sectionum conicarum circa axim communem positarum datam conisectionem abscindentium non in eius vertice, quas omnes eadem recta linea contingat, erunt singulares tantummodo parabolæ, & circulus, ellipses verò, & hyperbole erunt infinitæ.*



Quoniam circa communem axim D A constitui possunt parabolæ, circulus, infinitæ hyperbolæ, & infinitæ ellipses habentes semilatus rectum axis æqualẽ singulari breuisecanti D A in sectione conica B A C educto, & hæ omnes abscindunt conisectionem B A C in A. Ergo patet propositum. (Prop. 17. addit huius. Prop. 21. addit. huius.)

Hinc colligitur dari non posse conisectionem minimam extrinsecus tangentium, neque maximam intrinsecus tãgentium eandem conisectionem in puncto A extra verticem axis posito.

Nam qualibet conisectio, cuius semierectum axis minus est breuisecante singulari D A intrinsecus tangit sectionem B A C in A, & si semierectum maius fuerit eadem D A extrinsecus eandem sectionem B A C continget, neque vnquam cessant prædicti contactus extrinseci, vel intrinseci quousque semierectum axis efficitur æquale breuisecanti D A: at tunc non amplius contingit, sed secat eam in A. Quare patet propositum. (Prop. 18. addit. huius. Prop. 19. addit. huius. Prop. 21. addit. huius.)

Constat etiam quod parabolarum vnica tantummodò, & circulorum vnicus etiam abscindit conisectionem B A C in A, & contingit eandem contingentem A G in A.

At hyperbolarum, atque ellipsium abscindentium eandem sectionem B A C in A, quas omnes eadem recta linea A G tangit in A non potest assignari maxima, neque minima.

Nam vt dictum est ad 17. Additarum huius libri infinitæ hyperbolæ se se contingentes in vertice axis desinunt in parabolam vnicam, & post parabolam interius se se successiuè contingunt infinitæ ellipses ad axim maiorem adiacentẽs, quæ desinunt in circulum vnicum, ac post circulum interius eum contingunt infinitæ ellipses ad axim minorem adiacentes, quarum omnium semierecta latera axium æqualia sunt breuisecanti singulari D A datæ sectionis B A C. Quare patet propositum.

LIBRI SEXTI FINIS.



APOLLONII PERGAEI
CONICORVM LIB. VII.



DEFINITIONES.

I.



SI diuidatur inclinatum ſecundum proportionem figuræ, aut addatur vni axium ellipſis lineæ, earumque differentia, aut aggregatum ad eandem lineam habeat eandem proportionem figuræ: vocabo homologam inclinati PRÆSECTAM.

II.

Et homologam erecti INTERCEPTAM.

III.

Atque punctum, quod eſt extremum ipſius interceptæ, & diametri: vocabo TERMINVM COMMVNEM.

IV.

Reliquum verò TERMINVM DIVIDENTEM.

V.

Et differentiam, vel ſummam lateris, & interceptæ: vocabo INTERCEPTAM COMPARATAM.

VI.

Differentiam verò, aut ſummam lateris, & præſectę: vocabo PRÆSECTAM COMPARATAM: hoc autem latus refertur ad diametrum, quæ bifariam diuidit lineam coniungentem verticem ſectionis, & terminum potentis huius lateris:

reliquæ

reliquæ verò lineæ referuntur ad hoc latus.

VII.

Insuper vocabo duas diametros coniugatas, & æquales in ellipsi, ÆQVALES.

Et si quidem ad vtrasque partes axis sectionis duæ diametri educantur, quæ ad sua erecta eandem proportionem habeant, vtique vocabo eas ÆQVALES.

VIII.

Diametros verò æquales ad vtrasque partes duarum axium ellipsis cadentes, voco Homologas illius axis: suntque homologæ diametri in ellipsi transuersa ad transuersam, & recta ad rectam.

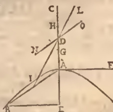
NOTÆ.

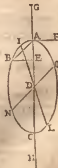
I. *Prima definitio breuissimè exponi potest hac ratione. Si axis transuersus interius in hyperbola diuidatur, aut exterius in ellipsi, secundum proportionem figuræ, segmentum homologum axis transuersi vocabo Præsectum, vt si fuerit hyperbole, vel ellipsis A B, cuius axis transuersus A C, centrum D, latus rectũ A F, & in hyperbola secetur C A inter vertices A, & C; in ellipsi verò secetur exterius in puncto G, ita vt summa, vel differentia ipsarum G A, & axis C A, idest C G ad G A habeat proportionem figuræ scilicet eandem, quàm habet latus transuersum C A ad latus rectum A F; tunc quidem vocatur recta linea C G Præsecta.*

II. *Atque G A vocatur Intercepta.*

III. *Punctum verò A extremum interceptæ G A, & diametri C A vocabitur terminus communis duarum linearum, scilicet axis C A, & additæ; vel ablatæ A G.*

IV. *Punctum verò G, in quo axis A C interius, vel exterius diuiditur secundum proportionem figuræ vocatur terminus diuidens; Si verò secetur C H æqualis A G vocabitur etiã C H intercepta, & A H præsecta, atque C terminus communis, & H terminus diuidens.*





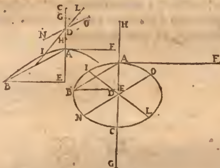
V. *Si diameter I L secuerit bifariam subtensam A B à sectionis vertice A eductam, atque à termino B*

ducatur

ducatur B E perpendicularis ad axim eum secans in E, tunc quidem axis segmentum C E ab opposito vertice C ductum, vocat interpres Latus. Postea summam in prima ellipsi, & differentiam in reliquis figuris lateris C E, & interceptæ H C, nimirum ipsam lineam H E, vocat Intereeptam comparatam.

VI. *Et lateris C E, & præsectæ G C differentia in tribus prioribus figuris, & summa in figura quarta, idest G E, vocatur Præsecta comparata.*

VII. *Ducantur in ellipsi A B C duæ diametri coniugatæ I L, & N O, quæ inter se sint æquales. Vel transuersa I L ad eius latus rectum eandem proportionem habeat, quàm eius coniugata N O ad suum latus rectum; tunc quidem vocat pariter diametros coniugatas I L, N O AEquales.*

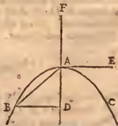


SECTIO PRIMA

Continens Proposit. I. V. & XXIII. Apollonij.

PROPOSITIO I.

SI in parabola A B à termino axis A D educatur recta linea A B subtendens segmentum sectionis A B, & ab eius termino ducatur B D ad axim perpendicularis; vtiquè illa chorda poterit eius abscissam D A in aggregatum abscissæ, & erecti.



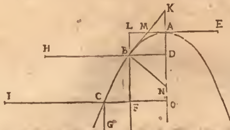
a Fiat A F æqualis erecto A E. Quia quadratum A B est æquale quadrato D A

 cum

cum quadrato D B, quod est æquale ipsi A D in A F; igitur est æquale ipsi F D in D A. Quod erat ostendendum.

PROPOSITIO V. & XXIII.

IN parabola A B C cuiuscumque diametri B F erectus B H excedit axis A D erectum A E quadruplo abcissæ A D potentis à termino illius diametri ad axim ductæ 23. & diametri C G, remotioris ab axe, erectus C I maior est erecto B H diametri propinquioris B F quadruplo differentiæ axis abscissarum potentium à terminis diametrorum ad axim ductorum. a



Educamus A L, B K tangentes in A, B, & B N perpendicularem ad
11. lib. 1. B K, erit K D in D N æquale quadrato D B, quod est æquale ipsi A E in A D; ergo K D ad D A eandem proportionem habet, quàm A E ad
35. lib. 1. D N: estque D K dupla ipsius A D (37. ex 1.) igitur A E est dupla ipsius D N; quarè A E cum duplo D K, nempe cum quadruplo A D est b
æqualis duplo K N, nempe B H (eo quod N K ad B K tangentem eandem
44. lib. 1. dem proportionem habet, quàm assumpta M B ad B L coniugatam (57. ex 1.) (propter similitudinem duorum triangulorum); ergo B H æqualis est quadruplo A D cum A E; quarè erectus diametri B F excedit A E quadruplo A D. & A O maior est, quàm A D; ergo erectus diametri c
C G remotioris maior est, quàm erectus B F proximioris quadruplo D O differentiæ abscissarum. Et hoc erat ostendendum.

Notæ in Proposit. I.

QVia quadratum A B est æquale quadrato D A, &c. *Quoniam rectangulum F D A æquale est rectangulo F A D subsegmentis vna cum quadrato reliqui segmenti D A; estque latus rectum A E æquale* a
A F;

A F; igitur rectangulum F D A æquale est rectangulo D A E vna cum quadrato D A; sed quadratum ordinatim ad axim applicatæ B D æquale est rectangulo D A E sub abscissa & latere recto contento; igitur rectangulum F D A æquale est duobus quadratis B D, & D A: estquè quadratum A B subtendentis rectum angulum D æquale duobus quadratis B D, & D A; igitur quadratum subtensa A B æquale est rectangulo A D E sub abscissa D A, & sub D F, quæ æqualis est eidem abscissæ cum latere recto. 11. lib. 1.

Notæ in Proposit. V. & XXIII.

a ET diametri G C remotioris ab axe erectus C I maior est erecto B H diametri propinquioris B F, &c. *Videtur hac 23. propositio deficiens; cum omnino inuerisimile sit Apollonium non animaduertisse rem adeo facilem; quod nimirum diametri G C remotioris ab axe erectus C I maior sit erecto B H diametri B F proximioris quadruplo differentia axis abscissarum potentium à terminis diametrorum ad axim ductorum.*

b Quare A E cum duplo K D, nempe cum quadruplo A D est æqualis duplo K N, nempe dimidio B H, &c. *Quoniam B H latus rectum diametri B F ad duplum contingentis B K est vt M B ad B L, sed (propter æquidistantes, & similitudinem triangulorum L B M, & K N B) vt M B ad B L, ita est duplum N K ad duplum K B; ergo latus rectum B H æquale est duplo K N; sed prius ostensum est quod D A æqualis est medietati ipsius D K, & D N æqualis medietati ipsius A E; igitur duplum K N æquale est duplo K D, seu quadruplo A D cum duplo D N, seu cum A E.* 49. lib. 1. 35. lib. 1.

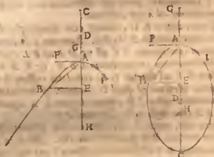
c Et A O maior est, quàm A D; ergo erectus diametri C G remotioris maior est quàm erectus B F proximioris, &c. *Addidi in hac conclusione verba hæc (quadruplo D O differẽtia abscissarum) quæ videntur deficere. Manifestum enim est, quod C I latus rectum diametri C G ab axe remotioris superat latus rectum B H diametri F B axi propinquioris quadruplo D O differentia abscissarum axis ab ordinatis à verticibus earũdem diametrorum ductis; nam B H æqualis ostensa est E A vna cum quadruplo A D, eademque ratione C I æqualis est eidem axis lateri recto E A cum quadruplo A O; ergo excessus C I supra B H erit æqualis quadruplo differentiæ D O.*

SECTIO SECVNDA

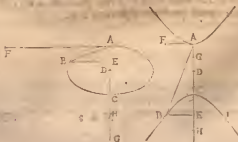
Continens Proposit. II. III. IV. VI. & VII. Apollonij.

PROPOSITIO II. & III.

SI in ſectione A B à termino cõmuni A vtriuslibet interceptæ educatur linea recta A B vſq; ad ſectionem, atquè ab eius termino B ad axim A E ducatur perpendicularis B E; erit quadratum A B ad rectangulum contentum à rectis lineis inter perpendicularis incidentiam, & terminos interceptæ, nempe A E in G E habebit eandem proportionem, quàm habet inclinatus, ſiuè tranſuerſus A C ad præſectam C G. a



Sit itaque A F erectus A C, & ponamus A E in E H æquale quadrato B E; igitur A E in E H ad A E in E C, nempe H E ad E C eſt vt



A F

b A F ad A C, & vt A G ad G C; ergo H E ad E C est vt A G ad G C; & componendo in hyperbolis, & diuidendo in ellipsibus, deinde comparando homologorum differentias in duabus figuris prioribus, & summas homologorum in reliquis, fiet A H ad G E, vt C A ad C G; c ergo A H in A E; nempe quadratum A B ad G E in A E est vt C A inclinatus, siue transuersus ad C G præsectam. Quod fuerat propositum.

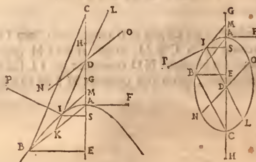
PROPOSITIO IV.

a SI hyperbolen, aut ellipsin A B tangat recta linea I M in I, & occurrat axi A C in M; vtique ipsius I M quadratum ad quadratum semidiametri N D coniugatæ ipsi I L habebit eādem proportionem, quàm axis contenta M S ad eius inuersam S D.

Educantur A Q, M R perpendiculares ad axim vsque ad I L, ponaturque linea P, quæ ad I M eandem proportionem habeat, quàm K I ad Q I, seu eandem, quàm habet M I ad I R; Ergo P est semissis erecti diametri I L (52. ex 1.) atque D N dimidium coniugatæ diametri N O poterit P in I D, atque I M poterit P in I R; & ideo I R ad I D, nempe M S contenta ad S D inuersam eandem proportionem habet, quā quadratum tangentis I M ad quadratum N D semissis coniugatæ ipsius I L. Et hoc erat propositum. 50. lib. 1.

PROPOSITIO VI. & VII.

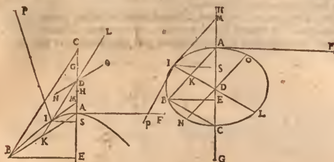
SI in hyperbole, aut ellipsi addantur axi transuerso, vel auferantur ab inclinato duæ interceptæ A G, C H ab eius terminis A, C, atque à vertice sectionis A educatur recta linea A B ad terminum alicuius potentialis B E, & per centrum D a



ducãtur diametri coniugatæ I L, N O, ita vt rectus N O æquidistet ipsi lineæ A B: vtiquè proportio figuræ inclinatæ, vel transuersæ coniugatarum, quæ est eadem proportioni quadrati I L ad quadratum N O, erit quoquè eadem, quàm habent lineæ inter incidentiam illius ordinatim applicatæ ad axim, & terminos diuidentes duarum interceptarũ, scilicet vt H E ad E G.

Educamus I M tangentem, & I S perpendicularem. Et quia A D est æqualis D C, & A K æqualis K B (eo quod I L cum sit coniugata N O bifariam diuidit A B) erit C B parallela ipsi I D, & propterea M S ad S D, nempè A E ad E C (propter similitudinem triangulorum) est vt quadratum I M ad quadratum N D (4. ex 7.) & quadratum I D ad quadratum I M est vt quadratum C B ad quadratum B A (propter similitudinem triangulorum); ergo proportio quadrati I D ad quadratum N D est composita ex ratione A E ad E C, & ex ratione quadrati C B ad quadratum B A; sed proportio quadrati C B ad quadratum B A est composita ex ratione quadrati C B ad C E in E H, & ex ratione C E in E H ad A E in E G, & ex ratione A E in E G ad quadratum A B; est vero quadratum C B ad C E in E H, vt C A ad A H (3. ex 7.) atquè A E in E G ad quadratum A B est vt G C ad C A (2. ex 7.), & proportio C E in E H ad A E in E G, componitur ex ratione C E ad A E, & ex b

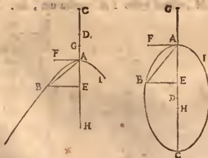
HE



H E ad E G; igitur proportio quadrati I D ad quadratum N D composita est ex proportione C A ad A H, & ex G C ad C A, atque ex C E ad E A, & A E ad E C, & tandem ex H E ad E G; sed C A ad A H, & G C ad C A componunt proportionem C A ad ei æqualem A C: similiter C E ad E A, & A E ad E C est vt E C ad se ipsam: quare si hæ proportiones auferantur, remanebit E H ad E G, vt quadratum I D ad quadratum N D: nempe erit eadem ac proportio figuræ diametri I L. Quod erat ostendendum.

Notæ in Proposit. II. III.

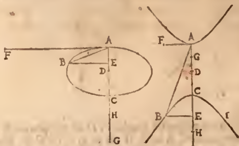
a SI in sectione A B à termino communi A interceptæ, &c. *Addidi particulam* vtriuslibet *interceptæ vt propositio efficiatur vniuersalis comprahen-*



tum

deus quartum earum in postrema figura, quàm superaddidi, vti necessariam pro intelligentia octauæ propositionis.

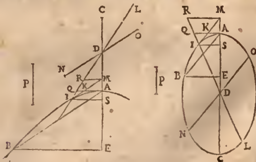
Et componendo in hyperbola, & diuidendo in ellipsi prima deindè coniungendo in duabus figuris prioribus, & occurrere faciamus respectiuum cum respectiuo in reliquis figuris post inuersionem, vt fiat, &c. b



Idest componendo in hyperbolis, & in ellipsibus comparando differentias terminorum ad consequentes, deinde comparando homologorum differentias in duabus figuris prioribus, & sumas in reliquis, tunc enim A H ad G E est, vt A C ad C G, & sumpta communi altitudine E A, erit rectangulum H A E ad rectangulum G E A, vt A C ad C G. Sed rectangulum H A E æquale est quadrato A E vna cum rectangulo H E A, cui æquale est quadratum B E, ergo quadratum A B æquale est rectangulo H A E (propterea quod A B subtendit angulum rectum E in triangulo B A E) quare quadratũ A B ad rectangulum A G E eandem proportionẽ habet quàm C A ad C G.

Notæ in Proposit. IV.

SI hyperbolen, aut ellipsim A B tangat recta linea I M, & occurrat axi A C in M, vtique ipsius I M quadratum, &c. *Suppleri debet* a

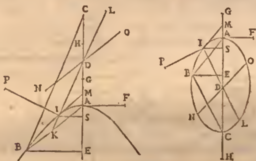


constru-

constructio, quæ deficit in hac propositione, vt nimirum sensus continuatus sit à punctis M, A, I educatur ad axim perpẽdiculares M R, A Q, & I S secãtes diametros in R, Q, & S, & A Q, I M se mutuò secent in K, erit I S ordinatim ad axim applicata, & A Q, sicuti etiam I M contingit sectionem. vocat autem Interpres rectam lineam M S, quæ inter tangentem, & ordinatam interijcitur Contentam, atque D S vocat Inuersam.

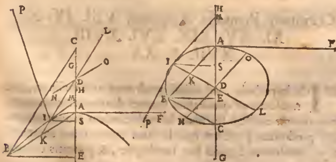
Notæ in Proposit. VI. & VII.

a SI addatur duabus extremitatibus transuersæ, aut insistant ad duas extremitates recti, aut diminuatur à duabus extremitatibus inclinati A,



& C duo intercepta, &c. *Expungo verba appositi tia. Aut insistat ad duas extremitates recti; quæ sensum perturbant.*

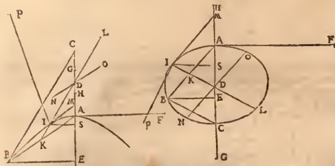
b Educamus I M tangentem, & I S perpendicularem. Et quia A D est æqualis D C, &c. *Idest Educamus I M contingentem sectionem in I, quæ*



secet axim in M, & I S ad axim perpendicularem, seu ordinatim applicatam, cum secans in S. Et quia trianguli A C B duo latera A C, A B secantur proportionaliter, scilicet bifariam in D, & K; ergo I D parallela est basi C B: estquè tangens I M parallela ipsi B A, cum ambo ad diametrum I L sint ordinatim applicata; pariterquè I S parallela est B E (cum sint ad axim perpendiculares) igitur triangula M I S, A B E similia erunt; pariterquè triangula D I S, C B E erunt similia: & ideo M S ad S I erit vt A E ad E B, & S I ad S D erit, vt B E ad E C: quarè ex aquali ordinata M S ad S D eandem proportionem habebit, quàm A E ad E C: estquè quadratum I M ad quadratum N D, vt M S ad S D; ergo quadratum I M ad quadratum N D est, vt A E ad E C, &c.

Prop. 5. lib. 2.

Prop. 4. huius.



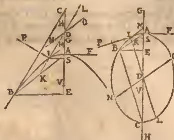
SECTIO TERTIA

Continens Proposit. Apollonij VIII. IX. X. XI. XV. XIX. XVI. XVIII. XVII. & XX.

VIII. IN hyperbola, vel ellipsi quadratum axis inclinati, siue transuersi ad quadratum summæ duarum diametrorum coniugatarum eiusdem sectionis habebit eandem proportionem, quàm productum præsectæ axis in suam interceptam comparatam ad quadratum summæ suæ interceptæ, & potentis comparatarum.

IX. Vel

IX. Vel ad quadratum differẽtiæ coniugatarum eãdem proportionem habet, quàm productum præfectæ in ſuam interceptam comparatam ad quadratum differentiæ interceptæ, & potentis comparatarum.



X. Vel ad rectangulum ſub duabus coniugatis contentum eandem proportionem habet, quàm præfecta axis ad ſuam potentem comparatam.

XI. Ad ſummam verò duorum quadratorum ex coniugatis eandem proportionem habet, quàm præfecta ad ſummam præfectæ, & interceptæ comparatarum.

XV. Sed ad quadratum erecti vnius coniugatæ eandem proportionem habet, quàm præfecta axis in ſuam interceptam comparatam ad quadratum ſuæ præfectæ comparatæ.

XIX. Sed ad quadratum differentiæ vnius coniugatarum, & eius erecti eandem proportionem habet, quàm productum præfectę axis illi diametro homologę in ſuam interceptam comparatam ad quadratum exceſſus præfectæ, & interceptæ comparatarum.

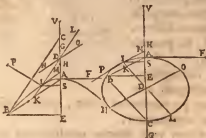
XVI. Ad quadratum verò ſummæ inclinatæ diametri, & eius erecti eandem proportionem habet, qnàm præfecta axis in ſuam interceptam comparatam ad quadratum ſummæ interceptæ, & præfectæ comparatarum.

XVIII. Sed ad figuram inclinatæ vnius coniugatarum eandem proportionem habet, quàm axis præfecta ad præfectam comparatam.

XVII. Et ad ſummam duorum quadratorum inclinatæ, & erecti vnius coniugatarum eandem proportionem habet, quàm præfecta in interceptam comparatam ad duo quadrata præfectæ, & interceptæ comparatarum.

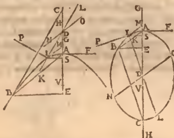
XX. Et tandem ad exceſſum duorum quadratorum laterum figuræ inclinatæ duarum coniugatarum eandem proportionem habet, quàm productum præfectæ in interceptam comparatã ad exceſſum quadratorum præfectæ, & interceptæ comparatarum.

Iisdem figuris manentibus sit H V potens comparata, & I P sit ereƐtū ipsius I L. Dico quod quadratum A C ad quadratum summæ I L, & N O est vt C G in E H ad quadratum E H V. Quia quadratū A D æquale a



37.lib.1. est S D in D M (39. ex 1.) ergo S D in D M ad quadratum I D, nempe E C in C A ad quadratum C B (propter similitudinem triangulorū) est vt quadratum A D ad quadratum I D, nempe vt quadratum A C ad quadratum I L: estque quadratum C B ad C E in E H, vt C A ad A H, seu ad C G (2. 3. ex 7.) idest vt A C in C E ad C G in C E, & permutando; igitur A C in C E ad quadratum C B, quod habebat (vt ostensum est) eandem proportionem, quàm quadratum A C ad quadratum I L, erit vt G C in C E ad C E in E H, nempe vt C G ad E H, seu C G in E H ad quadratum E H; igitur quadratum A C ad quadratum I L eandem proportionem habet, quàm C G in E H ad quadratum E H. Et quadratum I L ad quadratum N O, seu L I ad I P est vt H E ad E G (6. 7. ex 7.) scilicet vt quadratum E H ad H E in E G, quod æquale suppositum fuit quadrato H V; Ideoque I L ad N O eandem proportionem habebit, quàm E H ad H V; quapropter quadratum I L, siue ad quadratum summæ ipsarum I L, N O est vt quadratum H E ad quadratum E H V; siue ad quadratum differentiæ I L, & N O erit vt quadratum E H ad quadratum differentiæ E H, & H V, siue ad I L in N O habebit eandem proportionem, quàm E H ad H V; siue ad duo quadrata I L, N O eandem proportionem habebit, quàm E H ad summam E H, E G; eo quod quadratum I L ad quadratum N O est vt E H ad E G; siue insuper ad quadratum I P eandem proportionem habebit, quàm quadratum E H ad quadratum E G; vel potius ad quadratum differentiæ I L, & I P erit vt quadratum E H ad quadratum differentiæ E H, & E G, vel rursus ad quadratum rectæ lineæ ex L I, & I P compositæ, erit vt quadratum H E ad quadratum summæ duarum H E, E G, atque ad L I in I P eandem proportionem habebit, quàm H E ad E G; vel ad quadratum ipsius L I cum quadrato I P habebit eandem proportionem, quàm quadratum H E ad duo quadrata b

drata H E, & ipsius E G, siue ad differentiam duorum quadratorum L I, & ipsius I P eandem proportionem habebit, quàm quadratum H E ad differentiam duorum quadratorum H E, & E G. Et iam ostensum est quod quadratum A C ad quadratum I L eandem proportionem habet, quàm C G in H E ad quadratum H E; 8. ergo ex æqualitate quadratum A C, siue ad quadratum summæ I L, N O est, vt C G in H E ad qua-
c dratum E H V; 9. siue ad quadratum differentiæ eius, quæ est inter I
d L, N O est vt C G in H E ad quadratum excessus E H supra H V: 10. siue ad I L in N O erit, vt C G ad H V: 11. siue ad duorum quadrato-
e rum I L, N O summam, erit vt
f C G ad summam G E, E H; 12. siue ad quadratum I P erit, vt C G in H E ad quadratum E G:
g 13. siue ad quadratum differentiæ L I, I P erit, vt C G in E H ad quadratum differentiæ H
h E, E G: 14. siue ad quadratum ex recta linea æquali sūmæ duarum L I, I P, erit vt C G in E H ad quadratum ex recta linea composita ex H E, E G:



i 15. siue ad L I in I P erit vt C G ad G E: 16. siue ad duo quadrata ex
k L I, & ex I P erit vt C G in E H ad duo quadrata E G, & E H: 17.
l siue ad differentiam duorum quadratorum ex L I, & ex I P erit vt C G in E H ad differentiam duorum quadratorum ex H E, & ex E G. Et hoc erat propositum.

Notæ in Proposit. VIII.

a IIsdem figuris manentibus sit H V potens comparata, &c. *Præter definitiones superius expositas hic duæ aliæ declarari debent, ignotum enim est quid nam nomine Figuræ comparatæ, & Potentis comparatæ intelligi debeat. Itaq; rectangulum sub præfecta comparata, & intercepta comparata contentum, idest rectangulum H E G vocatur Figura comparata: & si quadratum rectæ lineæ H V æquale fuerit rectangulo H E G vocatur H V Potens comparata.*

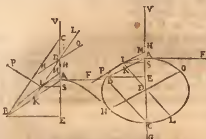
b Ergo S D in D M ad quadratum D I, nempe E C in C A ad quadratū C E, &c. *Æqualia enim spatia, scilicet rectangulū S D M, & quadratū D A ad idem quadratum I D habent eandem proportionem; sed quia triangula M I D, & A B C similia sunt, propterea quod latera homologa sunt parallela inter se; pariterquè triangula D S I, & C E B sunt similia, vt ostensum est in 6. & 7. huius; ergo S D ad D I erit vt E C ad C B, atquè M D ad D I est vt A C ad C B erunt composita proportiones eadem inter se, scilicet rectangulum S D M ad quadratum D I eandem proportionem habebit, quàm rectangulum E C A ad quadratum C B; quare vt quadratum A D ad quadratum D I, seu vt quadruplum ad quadruplum, scilicet vt quadratum A C ad quadratum I L, eo quod A D, & I D semisses sunt diametrorum A C, I L.* 37. lib. 1.

Notæ

Notæ in Proposit. IX.

C

SIue ad quadratum differentiæ eius, quæ est inter I L, N O est vt C G in H E ad quadratum E H, H V, &c. *Licet nouem subsequentes propositiones facile ex octaua deducantur, nequeunt tamen omnes simul conglobata vnico haustu deuorari; itaque operę pratium erit aliquantisper breuitatem nimiam Arabici Interpretis relinquere. Tria demonstrata sunt in propositione octaua, quæ in sequentibus nouem propositionibus vsum habent. Primò quod quadratum A C ad quadratum I L eandem proportionem habeat, quàm rectangulum C G in H E ad quadratum H E. Secundò quod I L ad N O eandem proportionem habeat, quàm H E intercepta comparata ad H V potentem comparatam.* 15. & 16. lib. 1. *Tertio quod quadratum I L ad quadratum N O, seu L I ad eius*

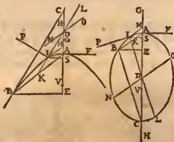


latus rectum I P, sit vt H E ad E G, vel vt quadratum H E ad rectangulum H E G, vel ad quadratũ H V. Modo propositio nona sic demonstrabitur. Quia I L ad N O eandem rationem habet quàm H E ad H V, erunt antecedentes ad differentias terminorum proportionales, idest I L ad differentiam ipsarum I L, & N O eandem proportionem habebit, quàm H E ad differentiam ipsarum E H, & H V: atquè quadratum I L ad quadratum ex differentia ipsarum I L, & N O descriptum eandem proportionem habebit, quàm quadratum H E ad quadratum ex differentia ipsarum E H, & H V descriptum: erat autem qua- 8. huius. *dratum A C ad quadratum I L, vt rectangulum C G in H E ad quadratum E H; ergo ex æquali ordinata quadratum A C ad quadratum ex differentia ipsarum I L, & N O descriptum eandem proportionem habebit, quàm rectangulum C G in H E ad quadratum ex differentia ipsarum E H, & H V.*

Notæ

Notæ in Proposit. X.

d SIue ad I L in N O erit vt C G ad H V, &c. *Quia I L ad N O habebat eandem proportionem, quàm E H ad H V positis communibus altitudinibus I L, & E H habebit quadratum I L ad rectangulum I L in N O eandẽ proportionem, quàm quadratum E H ad rectangulum E H in H V; sed quadratum A C ad quadratum I L habebat eandem proportionem, quàm rectangulum C G in E H ad quadratum E H; ergo ex æqualitate quadratum A C ad rectangulum sub I L in N O eandem proportionem habet, quàm rectangulum C G in H E ad rectangulum E H in H V, siue quàm habet C G, ad H V.* ex prop. 8. huius.



Notæ in Proposit. XI.

e SIue ad duorum quadratorum I L, N O summam erit vt C G ad summam G E, & E H, &c. *Quia quadratum I L ad quadratum N O erat, vt H E ad E G, antecedentes ad summas terminorum erunt proportionales, scilicet quadratum I L ad quadratum I L simul cum quadrato N O eandem proportionem habebit, quàm H E ad summam ipsarum H E, & E G; erat autem quadratum C A ad quadratum I L, vt C G ad E H; ergo ex æqualitate quadratum A C ad quadrata ex I L, & ex N O simul sumpta eandem proportionem habebit, quàm C G, vel H A ad summam ipsarum H E, & G E.* Prop. 8. huius.

Notæ

Notæ in Proposit. XV.

SIue ad quadratum I P erit vt C G in E H ad quadratum E G, &c. f
Quoniam I L ad I P erat vt H E ad E G; ergo quadratum I L ad quadratum I P erit vt quadratum H E ad quadratum E G; erat autem quadratum A C ad quadratum I L, vt rectangulum C G, seu A H in H E ad quadratum E H; igitur ex æqualitate quadratum A C ad quadratum I P eandem proportionem habebit, quàm rectangulum A H E ad quadratum G E.

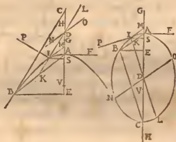
Notæ in Proposit. XIX.

SIue ad quadratum differentiæ L I, & I P erit vt C G in E H ad quadratum differentiæ H E, E G, &c. g
Quia I L ad I P erat vt H E ad E G, comparando antecedentes ad terminorum differentias, scilicet I L ad differentiam ipsarum I L, & I P eandem proportionem habebit, quàm E H ad differentiam ipsarum E H, & E G, & quadratum I L ad quadratum ex differentia ipsarum I L, & I P descriptum eandem proportionem habebit, quàm quadratum H E ad quadratum ex differentia ipsarum H E, & G E descriptũ: erat autem quadratum C A ad quadratum I L, vt rectangulum A H E ad quadratum H E; ergo ex æqualitate quadratum A C ad quadratum ex differentia ipsarum I L, & I P eandem proportionem habebit, quàm rectangulum A H E ad quadratum ex differentia ipsarum H E, & E G.

Notæ

Notæ in Proposit. XVI.

h SIue ad quadratum ex recta linea æquali summæ duarum I L, & I P erit, vt C G in H E ad quadratum ex recta linea composita ex H E, E G, &c. *Quia I L ad I P erat vt H E ad E G comparando, antecedentes ad summas terminorum, erit I L ad I L, & I P simul sumptas, vt H E ad H E, & E G simul sumptas, & quadratum I L ad quadratum ex summa ipsarum I L, & I P descriptum, erit vt quadratum H E ad quadratum ex summa duarum H E, & E G descriptum; & erat prius quadratum A C ad quadratum I L, vt rectangulum A H E ad quadratum H E; igitur ex æqualitate quadratum A C ad quadratum ex summa ipsarum I L, & I P descriptum eãdem proportionem habebit, quàm rectangulum A H E ad quadratum ex summa ipsarum H E, & E G descriptum.*



Notæ in Proposit. XVIII.

i SIue ad I L in I P erit, vt C G in G E, &c. *Quia I L ad I P est vt H E ad G E positis communibus altitudinibus I L, H E habebit quadratum I L ad rectangulum sub I L, & I P eandem proportionem, quàm quadratum H E ad rectangulum H E G: sed quadratum A C ad quadratum I L eandem proportionem habebat, quàm rectangulum A H E ad quadratum H E; ergo ex æqualitate quadratum A C ad rectangulum L I P eandem proportionem habebit quàm rectangulum A H E ad rectangulum H E G, seu vt A H, vel C G ad G E.*

Notæ in Proposit. XVII.

Siue ad duo quadrata ex I L, & I P erit, vt C G in E H ad duo quadrata E G, & E H, &c. *Quoniam I L ad I P erat vt H E ad E G, & quadratum I L ad quadratum I P erit vt quadratum H E ad quadratum E G: & comparando antecedentes ad terminorũ summas quadratum I L ad quadratum I L vna cum quadrato I P habebit eandem proportionem, quàm quadratum H E ad summam quadrati H E cum quadrato E G: sed prius quadratum A C ad quadratum I L erat vt rectangulum A H E ad quadratum H E; igitur quadratum A C ad summam quadrati I L cum quadrato I P eãdem proportionem habebit quàm rectangulum A H E ad quadratum E G vna cum quadrato E H.* k

Notæ in Proposit. XX.

Siue ad differentiam duorum quadratorum I L, I P erit, vt C G in H E ad differentiam duorum quadratorum ex H E, & ex E G, &c. *Quoniam vt dictum est quadratum I L ad quadratum I P eandem proportionẽ habet, quàm quadratum H E ad quadratum G E, & comparando antecedentes ad terminorum differentias quadratum I P ad differentiam quadrati I L à quadrato I P eandem proportionem habebit, quàm quadratum H E ad differentiam inter quadratum H E, & quadratum E G: estque quadratum C A ad quadratum I L, vt rectangulum A H E ad quadratũ H E; ergo ex æquali quadratum A C ad quadratorum ex I L, & ex I P differentiam eandem proportionem habebit, quàm rectangulum A H E ad quadratorum ex E G, & ex E H differentiam.* l

SECTIO

SECTIO QVARTA

Continens Proposit. Apollonij XII. XIII. XXIX. XVII. XXII. XXX. XIV. &XXV.

XII. XIII. XXV. Differentia quadratorum duorum axium hyperboles æqualis est differentiæ quadratorum quarumlibet duarum diametrorum coniugatarum.

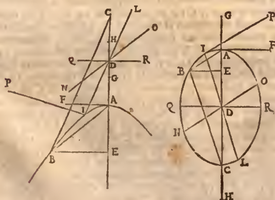
XXVIIII. Nempe differẽtiæ inter quadrata, à figuris earumdẽ diametrorum æquales sunt.

XXVII. Et differentia duorum axium maior est differentia quarumlibet duarum diametrorum coniugatarum.

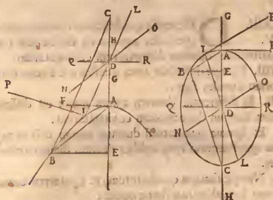
XXII. Et summa quadratorũ duorum axium ellipsis æqualis est summæ quadratorum quarumlibet duarum diametrorum coniugatarum.

XXX. Nempe summæ quadratorum, & figurarum earundem diametrorum homologarum sunt æquales.

XIIII. Axis verò transuersi quadratũ ad differentiam quadratorum duarum diametrorum coniugatarum eandem proportionem habet, quàm præfecta ad duplam inuersæ.

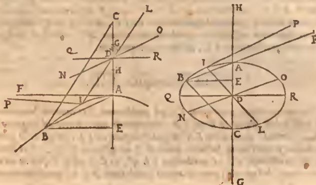


In eisdem figuris, quia quadratum A C ad quadratum sui coniugati a
ex Def. 1. & 2. (in propositione 12. 13. 25.) nempe C A ad A F erectum ipsius est, vt Præfecta C G ad Interceptam G A, siue ad C H; ergo quadratum A C in hyperbola ad differentiam quadratorum axium ipsius, & in ellipsi ad eorundem summam eandem proportionem habet, quàm C G ad H G. Demonstratum autem prius fuit, quadratum C A ad quadratum b
I L eandem proportionem habere, quàm C G ad H E, & quadratum



6. & 7. huius. I L ad quadratum N O eandem proportionem habet, quàm H E ad E G; Insuper quudratum I L ad summam quadratorum I L, N O in ellipsi, aut ad eorundem differentiam in hyperbola eandem proportionem habebit, quàm H E ad H G; & in propositione 14. vt H E ad excessum H E, E G, quod est duplum D G; igitur ex æqualitate quadratum A C, siue ad summam duorum quadratorum I L, N O, quemadmodum habetur in propositione 22. & 30. siue ad eorundem differentiam, veluti habetur in propositionibus 12. 13. 14. eandem proportionem habebit, quàm C G ad H G, siue ad duplum D G, vt in propositione 14. & demonstratum fuit in eadem proportione esse quadratum A C ad summam quadratorum A C, & eius coniugati, & est propositio 25. aut ad eorundem differentiam, & est propositio 12. quapropter summa quadratorum I L, N O coniugatarum in ellipsi, nempe quadratum I L vna cum eius figura est æquale aggregato quadrati A C vna cum quadrato eius coniugati 30. nempe quadrato A C, & illius figuræ, & in hyperbola differentia quadratorum I L, N O nempe excessus quadrati I L super illius figuram æqualis est differentiæ duorum quadratorum A C, & recti illius nempe quadrato A C, & illius figuræ 27. & ostensum iam est, quod I c
L in hyperbola maior est, quàm A C; ergo differentia A C & illius coniugati maior quàm differentia I L, & N O: atquè sic ostendetur, quod dif-

differentia I L; & N O maior sit, quàm differentia quarumlibet duarum coniugatarum ab axi remotiorum. Et hoc erat ostendendum.



Notæ in Proposit. XII.

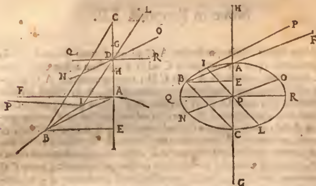
a IN eisdem figuris, quia quadratum A C ad quadratum sui coniugati in propositione 12. & 25. nempe A C ad A F erectum ipsius est vt præsecta C G ad Interceptam G A, seu C H: ergo quadratum A C in hyperbola ad differentiam quadratorum axium ipsius, & in ellipsi ad illorum summam est, vt C G ad H G, &c. *Idest. Quia quadratum A C ad quadratum axis ei coniugati Q R, siue C A ad eius erectum A F eandem proportionem habet, quàm præsecta C G ad Interceptam G A, vel ad C H, & comparando antecedentes ad terminorum differentias in hyperbola, & ad terminorum summas in ellipsi, quadratum C A ad differentiam quadratorum ex axi A C, & ex axi Q R habebit in hyperbola eandem proportionem, quàm C G ad differentiam inter C G, & C H: in ellipsi verò quadratum A C ad summam quadratorum ex A C, & ex Q R eandem proportionem habebit, quàm C G ad summam ipsius C G cum C H.* Defin. 1. & 2. huius.

b Et quia iam demonstratum est, quod quadratum C A ad quadratum I L sit, vt C G ad E H, &c. *Relicta abstrusa complicatione propositionum Arabici Interpretis distinctiori methodo, sicuti in præcedenti sectione factum est propositiones declarabimus. Quoniam in hyperbola quadratum I L ad quadratum N O eandem proportionem habet, quàm H E ad E G comparando antecedentes ad terminorum differentias, quadratum I L ad differentiam quadrati I L à quadrato N O eandem proportionem habebit, quàm H E ad ipsarum H E, & E G differentiam; sed quadratum A C ad quadratum I L est vt C G ad H E (veluti in propositione 8. ostensum est) ergo ex æqualitate quadratum A C ad quadratorum ex I L, & ex N O differentiam eandem proportionem habebit,* 6. huius.

habebit, quàm C G ad ipsarum H E, & E G differentiam, seu ad H G: sed in eadem hyperbola quadratum A C ad quadratorum A C, & Q R differentiam eandem proportionem habet, quàm C G ad ipsarum C G, & C H differentiam, seu ad H G (veluti in principio huius propositionis dictum est) ergo quadratum A C ad quadratorum ex A C, & ex Q R differentiam, eandem proportionem habebit, quàm ad quadratorum ex I L, & ex N O differentiam; & ideo in hyperbola differentiæ quadratorum axium A C, & Q R æqualis est differentia quadratorum I L, & N O coniugatarum.

Notæ in Proposit. XIII.

7. huius. *Q*Voniam in ellipsi quadratum I L ad quadratum N O eandem proportionem habet, quàm H E ad G E; comparando antecedentes ad terminorũ summas quadratum I L ad quadratorum ex I L, & ex N O summam eandem proportionem habebit, quàm H E ad ipsarum H E, & E G summam: sed quadratum A C ad quadratum I L est, vt C G ad H E (vt in octaua propositione dictum est) ergo ex æquali quadratum A C ad quadratorum ex*

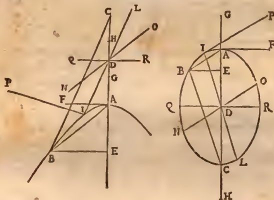


I L, & ex N O summam eandem proportionem habebit, quàm C G ad summam ipsarum H E, & E G, seu ad G H: sed in principio præcedentis notæ ostensum est, quod in ellipsi quadratum A C ad quadratorum ex A C, & ex Q R summam eandem proportionem habet, quàm C G ad summam ipsarum C G, & C H, seu ad G H: quarè quadratum A C eãdem proportionem habet ad summam quadratorum ex C A, & ex Q R, quàm ad summam quadratorum ex I L, & ex N O; & propterea in ellipsi quadrata duorum axium A C, & Q R simul sumpta æqualia sunt quadratis duarum coniugatarum diametrorum I L, & N O simul sumptis.

Notæ

Notæ in Proposit. XXIX.

QVoniam in hyperbola differentia quadratorum ex axi A C, & ex axi Q R aequalis est differentia inter quadratum I L à quadrato eius coniugatæ N O; estque Q R media proportionalis inter figuræ latera A C, & A F; ergo rectangulum C A F sub extremis contentum æquale est quadrato intermediæ Q R: Et propterea differentia inter quadratum A C, & rectangulum C A F æqualis erit differentiæ inter quadratum A C à quadrato Q R. 12. huius. 16. lib. 1.



Pari ratione erit differentia quadrati I L à rectangulo L I P æqualis differentia quadrati I L à quadrato N O; & propterea in hyperbole differentia quadrati axis A C à rectangulo sub figura lateribus contentum C A F æqualis est differentia quadrati diametri I L à rectangulo L I P sub lateribus figuræ eius.

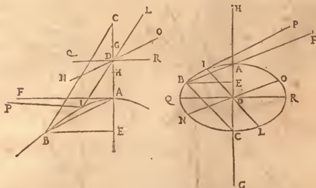
Notæ in Proposit. XXX.

QVoniam in ellipsi quadratorum ex A C, & ex Q R summa æqualis est summæ quadratorum ex I L, & ex N O: estque rectangulum C A F æquale quadrato Q R, & rectangulum L I P æquale quadrato N O (vt in præcedenti nota dictum est) igitur in ellipsi quadratum axis A C, & rectangulum C A F sub eius lateribus cõtentum simul sumpta æqualia sunt quadrato ex I L cum rectangulo figuræ eius L I P. Prop. 13. huius. ex 15. lib. 1.

Notæ

Notæ in Proposit. XIV. & XXV.

Q*Voniam nedum in hyperbola, sed etiam in ellipsi quadratum A C ad summam quadratorum ex I L, & ex N O eandem proportionem habet, quã A H ad summam ipsarum H E, & E G, atque quadratorum ex I L, & ex N O summa ad eorundem quadratorum differentiam eandem proportionem habet, quàm ipsarum H E, & E G summa ad earundem differentiam;*

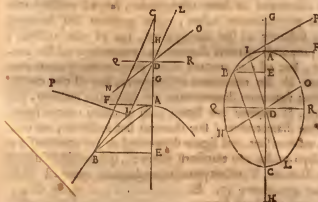


ergo ex æquali quadratum A C ad quadratorum ex I L, & ex N O differentiam eandem proportionem habet, quàm C G, siue H A ad ipsarum H E, & E G differentiam; sed in ellipsi ipsarum H E, & E G differentia æqualis est duplo E D; igitur in ellipsi quadratum A C ad quadratorum ex I L, & ex N O differentiam eandem proportionem habebit, quàm præfecta C G ad duplum inuersæ E D.

Notæ in Proposit. XXVII.

ET ostensum iam est, quod I L in hyperbola maior est, quàm A C; ergo differentia A C, & illius coniugati maior est, quàm differentia homologorum suorum à suis coniugatis, & differentia proximioris homologi ad suam coniugatam maior est differentia remotioris à sua coniugata, &c. *Hoc autem sic demonstrabitur. In diametris A C, & I L producatur A M æqualis Q R, & I K æqualis N O, & ab ijsdem secentur A S æqualis Q R, & I T æqualis N O: Quoniam M S bifariam secatur in A, & ei indirectum* C

indirectum additur S C, erit rectangulum M C S cum quadrato ex A S, seu ex Q R aquale quadrato ipsius A C; ergo rectangulum M C S aquale est differentia quadrati A C à quadrato Q R: pari ratione rectangulum K L T vna cum quadrato N O aquale erit quadrato I L: ergo similiter rectangulum K L T aquale est differentia quadratorum ex I L, & ex N O; estquè quadratum I L maius quadrato A C, cum diameter I L in hyperbola maior sit, quàm axis C A; igitur rectangulum K L T vna cum quadrato N O maius erit rectangulo M C S vna cum quadrato Q R: est verò rectangulum M C S aquale rectangulo K L T (cum sint differentia quadratorum ex coniugatis diametris, qua in hyperbola ostensa sunt aquales); ergo quadratum N Prop. 12. huius.



O, scilicet residuum maioris summa, maius erit quadrato Q R, quod est residuum summa minoris: & propterea N O maior erit, quàm Q R: erat autem I L maior quàm C A; igitur I L cum N O, seu K L maior erit, quàm A C, & Q R simul, siue quàm M C: sed in rectangulis M C S, & K L T aqualibus, vt K L ad M C, ita reciprocè C S ad L T; igitur C S, seu differentia ipsarum A C, & Q R maior est, quàm L T, seu differentia ipsarum I L, & N O in hyperbola.

Si postea prater I L ponatur alia diameter ab axe remotior cum sua coniugata erit similiter differentia quadratorum ex diametris coniugatis remotioribus ab axi aqualis differentia quadratorum axium A C; & Q R, & ideo

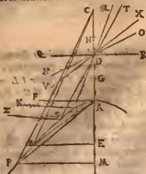
P p. *aqualis*

æqualis erit differentiæ quadratorum ex I L, & ex N O; estque pariter diameter illa remotior ab axe maior quàm I L; ergo simili ratiocinio ostendetur, quod differentia coniugatarum diametrorum ab axe remotiorum minor est, quàm differentia propinquiorum I L, & N O.

SECTIO QVINTA

Continens Proposit. XXI. XXVIII. XXXXII. XXXXIII. XXIV. & XXXVII.

Axes hyperboles si fuerint æquales, tunc quælibet diametri coniugatæ in illa sectione æquales sunt 21. si verò fuerit 28. vnus duorum axium in hyperbola, aut ellipsi maior, a tunc eius diameter homologa maior erit sua coniugata, quousquè ad duas æquales diametros coniugatas in ellipsi perueniatur, & axis maior ad suum coniugatum, siuè ad erectum eius maiorem proportionem habet, quàm quælibet alia diameter eiusdem sectionis ad sibi coniugatam, siue ad eius erectum; eritque proportio maioris diametri axi proximioris ad sibi coniugatam, siue ad eius erectum maior proportione maioris coniugatarum ab illo remotioris ad minorem, siue ad eius erectũ. Et minima figurarum diametrorum erit figura axis inclinati, siue transuersi, & maxima erit figura recti in ellipsi: atque figuræ reliquarum diametrorum (siue diametri sint inclinatæ, vel transuersæ) maiores sunt, quã figuræ diametrorũ ab axi remotiorũ 24. Et in ellipsi erectus axis transuersi minor est, quã erectus cuiuslibet alterius diametri, & erectus proximioris diametri minor est erecto cuiuslibet remotioris 37. Et excessus axis transuersi super eius coniugatum maior est, quã excessus homologarum diametrorum, super suas coniugatas, & excessus proximioris homologæ super suam coniugatam maior est, quàm excessus remotioris super eius coniugatã. Et differentià duorum laterum figuræ axis maior est, quàm

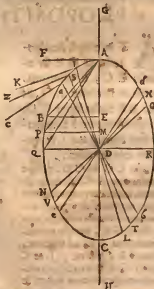


differentia duorum laterum figuræ sui homologi; pariterque proximioris axi homologi differentia duorum laterum figuræ eius maior est, quàm differentia duorum laterum figuræ remotioris.

PROPOSITIO XXI. & XXVIII.

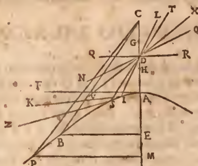
Sit itaque sectio A B P, & duo axes coniugati eius A C, Q R, centrum D; sintque I L, N O duæ aliæ diametri coniugatæ; pariterque S T, V X, & educamus ad axim C A M perpendiculares B E, P M. Dico quod si fuerit A C æqualis Q R; erit quoque I L æqualis ipsi N O, & S T ipsi V X. Si verò fuerit eorum aliquis reliquo maior, vtique eius homologa diameter maior quoque erit sua coniugata, & similiter in reliquis propositionibus.

Sit prius alter axis A C maior in prima figura, sed Q R in secunda; sintque A G, C H duæ interceptæ diametri A C. Et quia quadratum A C ad quadratum Q R, nempe A C ad eius erectum est vt A H ad H C, seu ad A G; & habet H A ad A G maiorem proportionem in prima figura, & minorem in secunda, quàm H E ad E G, quæ ostensa est (6. 7. ex 7.) vt quadratum I L ad quadratum N O, nempe I L ad eius erectum. Et similiter proportio illa maior, aut minor est, quam H M ad M G, quæ est vt quadratum S T ad quadratum V X; igitur A C ad Q R, siue ad erectum ipsius A C in prima maiorem proportionem habet, & in secunda minorem, quàm I L ad N O, siue ad erectum ipsius I L, siue quàm S T ad V X, vel ad erectum ipsius S T; sed quia H E ad E G in prima figura maiorem proportionem, & in secunda minorem, quàm H M ad M G habebit I L ad N O maiorem proportionem in prima, & minorem in secunda, quàm S T ad V X, cumque H E in prima figura sit maior, & in secunda minor, quàm E G, pariterque H M, quàm M G; erit I L in prima maior, & in secunda minor, quàm N O, similiterque S T, quàm V X. ex Def. 1. huius.



 Deinde

XXI. Deinde sit A C æqualis Q R in hyperbola fiet A C æqualis erecto, & conuenient duo puncta H, & G in puncto D, eritque A C ad b



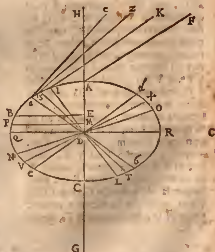
Q R vt A D ad se ipsam, siue vt A C ad se ipsam, quæ est vt D E ad se ipsam, & hæc ostensa est, vt quadratum I L ad quadratum N O; igitur I L, & N O sunt æquales, & sic demonstrabitur, quod S T, V X sunt æquales, & hoc erat propositum.

Prop. 6. huius.

PROPOSITIO XXVI

AT in ellipsi fieri potest, vt H E sit æqualis E G, si nimirum punctum B cadat in Q, & tunc B E cadet super Q D, & erit diameter I L æqualis suæ coniugatæ; & vocabo eas æquales.

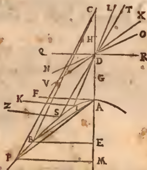
Quia C G ad C H, nempe quadratum A C ad suam figuram maiorem proportionem habet in primis figuris, & minorem in secunda ellipsi, quàm C G ad G E, nempe quàm quadratum A C ad figuram ipsius I L (18. ex 7.) & C G ad G E in primis figuris maiorem proportionem habet, & in



in secunda ellipsi minorem, quàm C G ad G M, nempe quàm quadratum A C ad figuram ipsius S T (18. ex 7.) ergo figura ipsius A C est minor; in secunda verò maior quàm figura ipsius I L; & similiter figura ipsius I L maior, aut minor est figura S T. Et hoc est propositum.

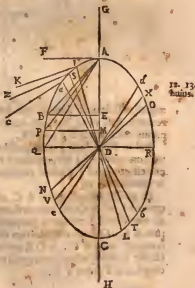
PROPOSITIO XXXXII.

IN hyperbole, & ellipsi sũma duorum axium minor est summa quarumlibet duarum cõiugatarum diametrorum eiusdẽ sectionis.



XXXXIII. Et planum ab eis contentũ minus est plano à duabus coniugatis contento, & planum à proximioribus axi coniugatis contentum minus est plano à remotioribus contento.

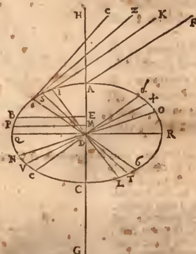
Iisdem figuris manentibus, quia in hyperbole A C minor est quàm I L, & I L, quàm S T; & siquidem A C æqualis fuerit Q R, erit quoque I L æqualis N O, & S T æqualis V X (21. ex 7.) ergo summa ipsorum A C, Q R minor est, quã summa I L, N O, & quàm S T, V X: si verò A C non fuerit æqualis ipsi Q R, vtique differentia duorum quadratorum A C, Q R æqualis erit differentiæ quadratorum I L, N O: & propterea summa ipsorum A C, Q R minor erit, quàm summa I L, N O: & hæc summa ex hac eadem demonstratione minor etiam erit, quàm summa duarum S T, V X. At in ellipsi; quia A C ad Q R maiorem proportionem habet, quàm I L ad N O (28. ex 7.) habebit quadratum ex summa A C, Q R ad earundem duarum summam quadratorum maiorem proportionem, quàm quadratum summæ I L, N O ad quadratorum sum-



summam earundem: & summa duorum quadratorum ipsarum æqualis est summæ duorum quadratorum A C, Q R (22. ex 7.) ergo summa A C, Q R minor est, quàm summa I L, N O, atque sic ostendetur, quod sūma I L, N O minor est, quàm summa S T, V X. Quod erat propositū.

PROPOSITIO XXXXIII.

Deinde in ellipsi quadratum summæ A C, Q R minus est quadrato summæ I L, N O; & summa duorum quadratorum A C, Q R



æqualis est summæ duorum quadratorum I L, N O (22. ex 7.) igitur remanet A C in Q R minus quàm I L in N O, & similiter I L in N O minus erit, quàm S T in V X. f

Sed in hyperbola, quia quilibet axium minor est homologa diametrō coniugatarum; igitur planum rectangulum ab axibus contentum minus est eo quod à duabus coniugatis continetur hoc igitur in hyperbole manifestum est.

In ellipsi autem, quia A C ad Q R maiorem proportionem habet, quàm I L ad N O per conuersionem rationis, & permutando maior A C ad minorem I L minorem proportionem habebit, quàm differentia ipsarum A C, Q R ad differentiam ipsarum I L & N O; & propterea differentia ipsarum A C, & Q R maior erit differentia reliquarum I L, & N O. Et similiter ostendetur, quod excessus I L super N O maior sit, quàm excessus S T super V X. g

PROP.

PROPOSITIO XXIV.

ET quia in ellipsi quadratum Q R, nempe figura axis A C minor est in prima, & maior in secunda ellipsi, qàm quadratum N O, nempe quã figura I L (28. ex 7.) estque A C maior in prima, & minor in secunda figura quàm I L; igitur erectum ipsius A C minus est in prima figura, & maius in secunda, quàm erectum I L. Et sic ostendetur, quod erexum ipsius I L maius sit, siue minus, quàm erectum S T.

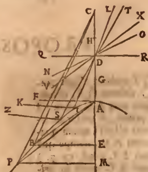
h

Et quia erectum ipsius A C minus est in prima ellipsi, & maius in secunda, quàm erectum ipsius I L, & A C maior est in prima, & minor in secunda figura quàm I L, igitur differentia A C, eiusq; erecti, quæ sunt duo latera figuræ A C, in quolibet

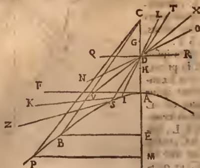
libet casu maior erit differentia I L, eiusque erecti. Pari modo ostendetur quod differentia ipsius I L, & eius erecti maior sit differentia ipsius S T, eiusque erecti. Et hoc erat ostendendum.

PROPOSITIO XXXVII.

IN hyperbole differentia laterum figuræ axis inclinati maior est differentia laterũ figurę sui homologi eiusdẽ sectionis: & differẽtia laterum figuræ inclinati proximioris axi maior est differentia laterum figuræ inclinati ab illo remotioris.



In hyperbole A B P sit axis C A, & I L, S T sit duæ aliæ diametri, & centrum D; atque erectus ipsius A C sit A F, & ipsius I L sit I K, atque ipsius S T sit S Z: & educamus C B, C P, parallelas duabus homologis diametris I L, S T, & duas ad axim perpendiculares B E, P M, secemusque duas interceptas C H, A G, & sit inclinatus A C in prima figura maior, quàm A F, in secũda verò minor. Et quoniam A C ad A F supponitur vt H A ad A G

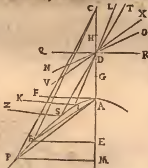


erit

erit quadratum A C ad quadratum differentiæ ipsarum A C, A F, vt quadratum H A ad quadratum H G, at ad quadratum differentiæ ipsarum I L, I K est, vt E H in H A ad quadratum H G (19. ex 7.) ad quadratum verò differentiæ S T, S Z est, vt H M in H A ad quadratum H G (19. ex 7.) est verò M H in H A maius quàm E H in H A, atque E H in H A maius quàm quadratum H A; igitur A C ad differentiam ipsarum A C, A F minorem proportionem habet, quàm ad differentiam ipsarum I L, I K, & ad differentiam earundem I L, I K minorem proportionem habet, quam ad differentiam ipsarum S T, S Z; igitur differentia ipsarum A C, A F maior est, quàm differentia ipsarum I L, I K, atquè differentia earundem I L, I K maior est quàm differentia S T, S Z. Quod erat propositum.

Notæ in Proposit. XXVIII.

Sit in primis figuris axis A C maior, quàm axis Q R. Quia quadratum A C ad quadratum Q R eandem proportionem habet, quàm H A ad A G: ex 15. 16. lib. 1. *estque G A minor quàm G E; ergo H G ad G A maiorem proportionem habet* Defin. 1. huius. *quàm ad G E: & componendo in hyperbola, & diuidendo in ellipsi H A ad A G maiorem proportionem habet, quàm H E ad E G; sed H E ad E G eandem* 6 & 7. huius. *proportionem habet, quàm quadratum I L ad quadratum N O; ergo quadratum A C ad quadratum Q R maiorem proportionem habet, quàm quadratum I L ad quadratum N O; & propterea A C ad Q R maiorem proportionem habet, quàm I L ad N O: & sunt quoquè earundem proportionum duplicatæ pariter inæquales, nimirum axis A C ad eius latus rectum A F maiorem proportionem habebit, quàm diameter I L ad eius latus rectum I K.* ex 15. 16. huius. *Secundò quia G E minor est, quàm G M; ergo H G ad G E maiorem proportionem habet, quàm ad G M; & componendo in hyperbola, & diuidendo in ellipsi H E ad E G maiorem proportionem habebit, quàm H M ad M G, & quadratum I L ad quadratum N O habet eandem proportionem, quàm H E ad E G; nec non quadratum S T ad quadratum V X eandem proportionem habet,* 6 & 7. huius. *quàm H M ad M G; ergo quadratum I L ad quadratum N O maiorem proportionem habet, quàm quadratum S T ad quadratum V X, & I L ad N O maiorem proportionem habebit, quàm S T ad V X, & earundem proportionum duplicatæ inæquales quoque erunt, scilicet I L ad eius latus rectum maiorem proportionem habebit, quàm S T ad eius latus rectum. Deinde in secundis figuris sit axis A C minor quàm Q R. Quia H A minor est, quàm H E;*

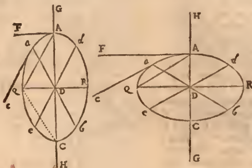


nec non H E minor quàm H M ergo H
A ad eandem H G minorem proportio-
nem habebit, quàm H E, & compa-
rando antecedentes, ad terminorum
Lem. 2. *summas vel ad differentias H A ad A*
lib. 5. *G minorem proportionem habet, quàm*
H E ad E G, & similiter H E ad E G
minorem proportionem habet, quàm H
ex 15. 16. *M ad M G: est verò quadratum A C*
lib. 1. *ad quadratum Q R, vt H A ad A G,*
Defin. 1. huius. *& quadratum I L ad quadratum N O,*
Prop. 7. *vt H E ad E G; pariterquè quadratum*
huius. *S T ad quadratum V X est, vt H M*
ad M G; & ideo A C ad Q R mino-
rem proportionem habebit, quàm I L ad
N O, & I L ad N O minorem propor-
tionem habebit, quàm S T ad V X; &
ex 15. 16. *similiter earundem proportionum dupli-*
lib. 1. *cata eodem ordine inæquales erunt, sci-*
licet A C ad eius latus rectum minorem
proportionem habebit quàm I L ad eius
rectum latus, &c. Ad perfectionem
partis secundæ propositionis 28. requiri-
tur hoc.

L E M M A. I.

IN ellipsi cuius axes inæquales sunt, duas diametros coniugatas inter se æquales reperire.

In eadem figura coniungatur recta linea A Q terminos axium coniungens, & per centrum huic parallela sit e d, *perq; idem centrum, & semipartitionem*

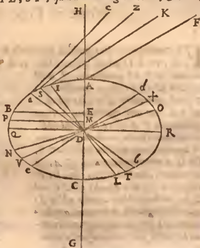


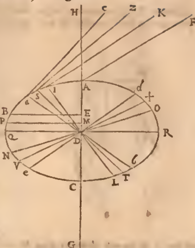
applicata A Q ducatur diameter a b: *Dico diametros coniugatas* a b, *&* e d *aquales esse inter se. Quoniam à termino Q ordinatim applicata A Q ad diametrum* a b *ducitur ad axim perpendicularis Q D cadens in centrum D; ergo H D ad D G eandem proportionem habet, quàm quadratum diametri* a b *ad quadratum eius coniugata* c d; *suntquè H D, & G D aquales inter se, cum semiaxes, atquè intercepta sint aquales inter se; ergo diametri coniugata* a b, *&* c d *aquales erunt inter se hoc pramisso.* Prop. 7. huius.

Reperiantur in ellipsi dua diametri coniugata inter se aquales a b, e d, *& inter* a, *& A ponantur diametri I L, S T, quarum coniugata N O, & V X, & ducatur reliqua recta linea, vt prius factum est, & ponatur primo loco axis A C maior quàm Q R: Dico I L maiorem esse ipsa N O, & S T maiorem V X. Quia quadratum A C ad quadratum Q R eandem proportionem habet, quàm H A ad A G, & quadratum I L ad quadratum N O eandem proportionem habet, quàm H E ad E G; pariterquè quadratum S T ad quadratum V X eandem proportionem habet, quàm H M ad M G; sed in prima hyperbola, & prima ellipsi H A maior est, quàm A G, & H E maior, quã E G, atquè H M maior, quàm M G; igitur quadratum I L ma-*

Defin. 1. huius.

Prop. 7. huius.





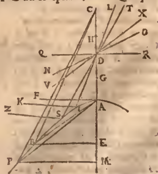
ius est quadrato N O, & quadratum S T maius quadrato V X; ideoquè quando axis A C maior est, quàm Q R, erit diameter I L maior eius coniugata N O, & S T maior quàm V X. Pari ratione, quando axis A C minor est, quàm Q R erit H A minor, quàm A G, & H E minor, quàm E G, atque H M minor, quàm M G: & propterea in secunda hyperbola, & secunda ellipsi etiam diameter I L minor erit, quàm N O, & S T minor erit quàm V X. Idem contingit in reliquis diametris, dummodò in ellipsi cadant inter A, & a, nam a b *est æqualis suæ coniugatæ* e d *: & vltra punctum* a *ad partes Q diametri cadentes minores sunt suis coniugatis in prima ellipsi, & maiores in secunda, cum propinquiores sint axi Q R.*

Si verò fuerit vnus duorum axium in hyperbola aut ellipsi maior, tunc eius homologa diameter coniugata maior est, &c. *Non nulla in hoc textu deficiunt; non enim omnes diametri in ellipsi sunt inæquales vt in Lemmate* 1. *ostensum est, & ideo textus corrigi debuit.* a

Notæ in Proposit. XXI.

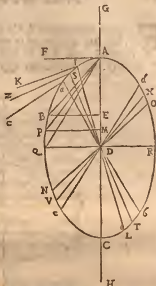
Et conuenient duo puncta H, & G in puncto D; eritque A C ad Q R, vt A D ad se ipsam, siue vt A C ad se ipsam, &c. *Quia quadratum A C ad quadratum Q R est vt C G ad G A, & vt quadratum I L ad quadratum N O, ita est H E ad E G, nec non quadratum S T ad quadratum V X est vt H M ad M G; sed quandò axium quadrata sunt inter se æqualia, tunc quidem præfecta C G, seu H A æqualis est intercepta G A, & terminus G, seu H cadit in cẽtro D; & ideo H E vel D E æqualis est E G vel E D: pariterq; H M æqualis est M G: quarè coniugatarũ diametrorũ quadrata æqualia sunt inter se; & etiã transuersa latera suis erectis æqualia erunt.* b

Defin. 1. Prop. 7. huius.

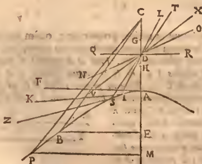


Quia

C Quia C G ad A G, nempe quadratum A C ad suam figuram in maiori, & in figura secunda ellipsi in minori proportione, &c. *Idest, In prima, & secunda figura hyperboles, & in prima figura ellipsis habet C G ad G A maiorem proportionem, quàm ad G E, eo quod G E maior est, quàm G A: at in secunda figura ellipsis proportio minor est; quia G E minor est, quã A G. Propositum verò aliter ostendetur hac ratione.*



Quoniam ex demonstratis in nota propos. 27. in hyperbola, atquè ex propositione 11. libri quinti in ellipsi erit axis minor, & rectus Q R minor diametro recta N O, & N O minor remotiore V X, ideoquè quadratum Q R minus erit quadrato N O, & quadratum N O minus quàm quadratum V X: est verò figura, seu rectangulum C A F sub extremis contentum æquale quadrato Q R ex media proportionali inter illas descriptum: pariterquè rectangulum L I K æquale est quadrato diametri ei coniugatæ N O, nec non rectangulum T S Z æquale erit quadrato V X, ergo rectangulum C A F minus est rectangulo L I K, atque rectangulum L I K minus est rectangulo T S Z. 15. lib. 1.



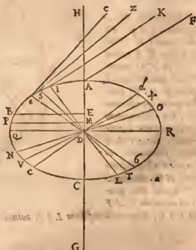
E contra in ellipsi secunda. Quia Q R maior est, quàm N O, & hæc maior, quàm V X; ergo rectangulum C A F maius est rectangulo L I K, & hoc maius erit rectangulo T S Z.

Notæ

Notæ in Proposit. XXXXII.

Erit igitur aggregatum A C, Q R minus quàm aggregatum I L, N O, &c. *Hoc ostensum est in nota proposit. 27. huius.* d

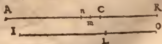
At in ellipsi, quia A C ad Q R maiorem proportionem habet, quàm I L ad N O, erit quadratum aggregati A C, Q R ad summam duorum e

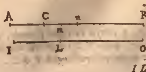


quadratorum ipsarum in maiori proportione, quàm quadratum aggregati I L, N O ad summam duorum quadratorum earundem, & summa duorum quadratorum ipsarum, &c. *Fiat A R aqualis duabus A C & Q R, I O fiat aqualis duabus I L, & N O; atque secetur A R in* m, *vt sit A* m *ad* m *R, vt I L ad L O. Quia in prima ellipsi A C ad Q R, vel ad C R (in hac figura) maiorem proportionem habet, quàm I L ad N O, seu ad L O (in præsenti figura); Ergo A C ad C R maiorem proportionem habet, quàm A* m *ad* m *R; ideoq; A C ad eandem A R maiorem proportionem habebit quàm A* m; *& propterea A* m *minor erit, quàm A C: sed A* m *maior est quàm M R, eo quod I L priori homologa maior est, quàm L O; at in secunda ellipsi A C ad C R minorem proportionem habet, quàm I L*

Prop. 21. huius.

Lem. 2. lib. 5.



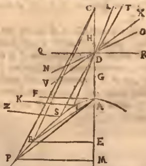


I L ad L O, seu quàm A m *ad* m *R; & A C ad eandem A R minorem proportionem habet quàm A* m; *ideoque A C minor erit, quàm A* m, *& A* m *minor quàm* m *R, sicuti I L minor est, quàm L O; & propterea secta A R bifariam in* n *in vtroq; casu C* n *semidifferentia maximè, & minimè scilicet A C, & C R maior erit, quàm* m n *semidifferentia inaequalium intermediarum A* m, *& R* m: *suntque duo quadrata ex A C, & ex C R aequalia quadratis ex R* n, *& ex C* n *bis sumptis, atquè quadrata ex A* m, *& ex R* m *aequalia sunt quadratis ex R* n, *& ex* m n *bis sumptis, sed duplum quadrati* n *C cum duplo quadrati* n *R maiora sunt duplo quadrati* n m *cum duplo quadrati* n *R (cum* n *R sit communis, &* n *C maior sit* n m); *igitur in vtroque casu duo quadrata ex maxima, & ex minima, scilicet quadratum A C vna cum quadrato C R maiora sunt quadrato A* m, *& quadrato* m *R simul sumptis: & quadratum A R minorem proportionem habet ad summam quadratorum ex A C, & ex C R, quàm ad summam quadrati A* m, *& quadrati* m *R; sed quadratum I O ad quadratum I L vna cum quadrato L O eandem proportionem habet, quàm quadratum A R ad summam duorum quadratorum ex A* m, *& ex* m *R (propterea quod A R, & I O diuiduntur proportionaliter in* m, *& L): igitur quadratum A R ad summam quadrati A C vna cum quadrato C R minorem proportionem habet, quàm quadratum I O ad summam quadrati I L cum quadrato L O.* Lem. 2. lib. 5.

Non secus ostendetur, quod quadratum summae I L, & N O ad quadrati ex I L, & quadrati ex N O summam habet minorem proportionem, quàm quadratum summae S T, & V X ad quadratorum ex S T, atquè ex V X summam: & ideo I L cum N O minores erunt, quàm S T cum V X. ex 22. huius.

Notae in Proposit. XXXXIII.

f REmanet A C in Q R minus quàm I L in N O, & pariter I L in N O minus quàm S T in V X, &c. *Quia si ex quadrato summae A C, & Q R auferantur duo quadrata ex C A, & ex Q R simul sumpta, remanent duo rectangula sub C A, & Q R contenta: pariterque duplum rectanguli ex I L in N O est residuum quadrati ex summa ipsarum I L, & N O descripti, postquàm ablata sunt quadratum ex I L, & quadratum ex N O simul; sed bina quadrata vtrinq; ablata sunt aequalia inter se in ellipsi; & summa A C, Q R minor est quàm summa I L, N O; Ergo duplum rectanguli sub C A & sub Q R minus est duplo rectanguli I L in N O, & rectangulum sub A C, & Q R minus est rectangulo sub I L, & N O.* Prop. 22. huius. Prop 42. huius.

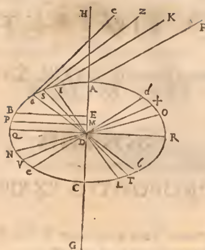


QVia A C ad Q R maiorem proportionem habet, quàm I L ad N O post cōuersionem rationis, & permutationem A C maior ad I L, minorem, habebit proportionem minorem, quàm excessus A C super Q R ad excessum I L super N O, &c. *Hoc quidem verum est in ellipsi, (veluti dictum est ad propos. 28. huius) quandò maior axis est A C, sed quandò A C est minor, atque A C ad Q R minorem proportionem habet, quàm I L ad N O, opere pretium erit, demonstrare, quod tunc etiam differentia axium A C, & Q R maior sit differentia diametrorum I L, & N O. Quoniam existente C A minore, quàm Q R (ex 28. huius) A C ad Q R minorem proportionem habet, quàm I L ad N O; & inuertendo Q R ad A C maiorem proportionem habebit, quàm N O ad I L, & per conuersionē rationis Q R ad differentiam ipsarum Q R, & A C minorem proportionem habebit, quàm N O ad differentiam ipsarum N O, & I L; & permutando Q R maior ad minorem N O habebit proportionem minorem, quàm differentia ipsarum Q R, & A C ad differentiam ipsarum N O, & I L: & propterea differentia ipsarum Q R, & A C maior erit, quàm differentia ipsarum N O, & I L.*

Postea quandò C A est maior axis, tunc I L ad N O maiorem proportionem
28. huius. *habet, quàm S T ad V X; & similiter per conuersionem rationis, & permutando maior I L ad minorem S D habebit minorem proportionem, quàm differentia coniugatarum diametrorum I L, & N O ad differentiam coniugatarum S T, & V X, quapropter axi propinquiorum diametrorum I L, & N O differentia maior erit, quàm remotiorum coniugatarum S T, & V X differentia.*

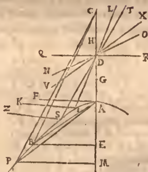
E contra quandò C A est axis minor idem concludetur, vti paulo ante factum est.

Notæ



Notæ in Proposit. XXIV.

h IGitur erectum ipsius A C minus est in prima, & maius in secunda, quàm I L, & sic ostendetur, quod erectum ipsius I L maius sit, siue minus quàm erectum S T, &c. *Quoniam in prima ellipsi rectangulum C A F minus est rectangulo L I K; ergo A C ad I L minorem proportionem habet reciproce, quã I K ad A F; quare I K ad aliquam aliam quantitatem maiorem, quàm A F eandem proportionem habebit, quàm A C ad I L; estquè A C maior quàm I L in prima ellipsi; ergo multò magis I K maior erit quàm A F. Pari ratione in eadem prima ellipsi rectangulum L I K minus est rectangulo T S Z, & I L axi maiori propinquior maior est, quàm S T; ergo S Z maior erit, quàm I K.* Prop. 28. huius.



E contra in secunda ellipsi rectangulum L I K minus erit rectangulo C A F; & rectangulum T S Z minus erit rectangulo L I K; estquè T S maior quàm I L, & I L maior, quàm A C; igitur reciprocè A F maior erit, quàm I K, & I K maior, quàm S Z. Ibidem.

SECTIO SEXTA

Continens Proposit. XXXIII. XXXIV. XXXV. & XXXVI.

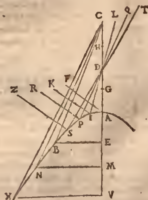


PROPOSITIO XXXIII.

Axis inclinatus si non fuerit minor dimidio sui erecti, vtique eius erectus minor est erecto cæterarum diametrorum inclinatarum eiusdem sectionis, & axi proximioris inclinati erectus minor est, quàm erectus remotioris.

XXXV. Et si fuerit axis inclinatus minor dimidio erecti, vtique ad vtrasque eius partes cadent duæ inclinatæ, quarum quælibet æqualis est semissi erecti ipsius, atque eius erectus minor est erecto cuiuslibet inclinati ad vtrasque partes eius positæ, & erectus proximioris minor est erecto remotioris.

In hyperbole A B N sint A C, I L, P Q, S T diametri inclinatæ, & A F sit erectus ipsius A C, I K ipsius I L, P R ipsius P Q, & S Z ipsius S T: sitquè axis A C non minor medietate ipsius A F. Dico, quod A F minor est, quàm I K, & I K minor quàm P R, & P R minor quàm S Z. Educantur C B parallela I L, & C N ipsi P Q, & C X ipsi S T: & ducantur B E, N M, X V perpendiculares ad axim C A E: Quoniam si A C æqualis est ipsi A F, etiam I L æqualis est ipsi I K (21. ex 7.) & P Q ipsi P R; estque A C minor quàm I L, & I L, quàm P Q; ergo

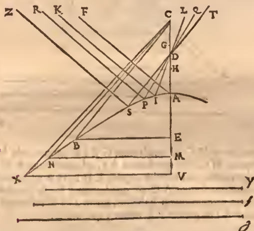


ex 38 lib. 5.

ergo A F minor eſt, quàm I K, & I K minor quàm P R. Si verò A C maior eſt, quam A F eſſet I L maior, quàm I K: & I L ad I K minorem proportionem habebit, quàm A C ad A F (28. ex 7.) & I L maior eſt quàm A C; igitur A F minor eſt, quàm I K: atquè ſimiliter patebit I K minorem eſſe quàm P R, & P R, quàm S Z. 21. huius.

PROPOSITIO XXXIV.

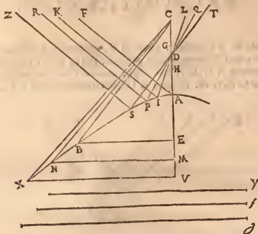
Deinde ſit A C minor, quàm A F, dummodò minor non ſit dimidio eius: & ſecentur duæ præſectæ A H, C G, quæ erunt æquales; pariterque A G, C H interceptæ æquales; ponaturque linea y æqualis ſummæ G E, G A. Et quia A G non eſt maior duplo A H, & y maior



eſt duplo A G, erit y in A H maius, quàm quadratũ A G; igitur y in A E ad y in A H, nempe E A ad A H minorem proportionẽ habebit, quã y in A E ad quadratum A G; ideoquè E H ad H A, nẽpe E H in H A ad quadratum A H minorẽ proportionẽ habebit, quàm y, ſeu eidem æquales E G, G A in A E, cum quadrato A G (quæ ſunt æqualia quadrato G E) ad quadratum A G; ergo E H in H A ad quadratum E G, ſeu (vt oſtenſum eſt in 15. ex 7.) quadratum A C ad quadratum I K minorem proportionem habebit, quàm quadratum A H ad quadratũ A G, ſeu quã quadratum A C ad quadratum A F. Igitur A C ad I K minorem proportionem habet, quàm ad A F; & propterea A F minor eſt quàm I K.

 Simili

Simili modo oſtendetur quod I K minor ſit, quàm P R: etenim ſi ponatur linea *f* æqualis ſummæ M G, G E: cum G E non ſit maior duplo E H, & *f* maior ſit duplo G E; igitur *f* in E H maius eſt quadrato G E. Poſtea oſtendetur (quemadmodum antea dictum eſt) quod M H ad H E, nempe M H in H A ad E H in H A minorem proportionem habet



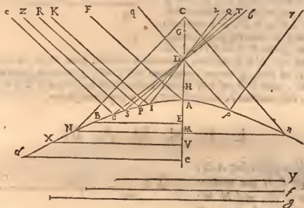
quàm quadratum M G ad quadratum G E; & permutando M H in H A ad quadratum M G, ſeu quadratum A C ad quadratum P R (15. ex 7.) minorem proportionem habebit, quàm E H in H A ad quadratum G E, nempe quàm quadratum A C ad quadratum I K: & propterea A C ad P R minorem proportionem habebit, quàm ad I K; ideoquè I K minor eſt, quàm P R: & pariter P R minor, quàm S Z.

PROPOSITIO XXXV. & XXXVI.

Sit poſtea A C minor dimidio A F; erit A G maior duplo A H, & ideo H G maior eſt, quàm H A: ponatur iam H M æqualis H G, ducaturque ad axim perpendicularis N M; iungaturque N C, & educatur diameter P Q parallela N C. Et quia M H medietas eſt ipſius M G, erit P Q dimidium ipſius P R (6. ex 7.) Inter duas diametros P Q, A C ducatur diameter I L, & C B ei parallela, & ad axim perpendicularis B E. Quoniam M H in H E minus eſt quadrato H G; addito communi

producto

producto ex G E, & G H in E H, erit M H in H E cum E G, atquè G H in H E, nempe summa M G, G E, quæ est æqualis ipsi *f* in E H minus erit, quàm quadratum H G cum aggregato E G, G H in E H, quæ sunt æqualia quadrato G E; igitur *f* in E H minus est quadrato E G. Postea vti prius dictum est ostendetur, quod quadratum A C ad quadratum P R maiorem proportionem habet, quàm ad quadratum I K: & propterea P R minor est, quàm I K. Non aliter ostendetur quod I K minor sit, quàm A F. Ponatur postea diameter S T extra locum inter P Q, A C compræhensum, ducaturque C X ei parallela, & ad axim perpendicularis X V. Igitur V H M maius erit quàm quadratum H G,



& eodem modo procedendo, tandem ostendetur quod quadratum A C ad quadratum S Z minorem proportionem habet, quàm ad quadratum P R, & ideo P R minor erit quàm S Z. Non secus ostendetur quod S Z minor est erecto cuiuslibet inclinati cadentis ad partem S T extra illam. Itaque demonstratum est, quod P R minor sit erecto cuiuslibet diametri sectionis cadentis ad vtrasque partes ipsius P Q versus A, & X, & erecti proximiores diametro P Q minores sunt remotioribus. Et hoc erat propositum.

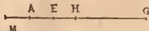
In Sectionem VI.

IN Expositione sequentium Propositionum difficultas, quæ à nimia prolixitate oritur, ineuitabilis est, nisi Methodus in textu seruata aliquantisper relinquatur: propterea non nulla lemmata præmittam, ex quibus semel demonstratis cuius omnes sequentium propositionum facillime, & breuissime deducuntur.

Lemma

LEMMA II.

SI recta linea H G producatur in A & E, ita vt A H, pariterque E H, non maior sit H G: Dico rectangulum ex A G E summa inæqualium segmentorum in E H intermediam sectionem, minus esse quadrato ex segmento intermedio minore E G.



Fiat H M æqualis H G, & quia A E æqualis, aut minor est, quàm M E; & E G maior, quàm E H, ergo A E ad M E minorem proportionem habet, quàm E G ad E H, & permutando A E ad E G minorem proportionem habebit, quàm M E ad E H, & cõponendo A G ad G E minorem proportionem habebit, quàm M H, seu ei æqualis G H ad H E, & iterum componendo A G E ad G E minorem proportionem habebit, quàm G E ad E H: quare Rectangulum ex summa A G E in H E minus erit quadrato ex intermedia G E, vt propositum fuerat.

LEMMA III.

IIsdem positis sint A H, & E H non minores quàm G H, vel H M: Dico rectangulum ex A G E in E H maius esse quadrato ex E G.



Quia A G maior est quàm E G, & G H non maior ipsa H E, ergo A G ad G E maiorem proportionem habet, quàm G H ad H E, & componendo A G E ad E G maiorem proportionem habebit, quàm G E ad E H, & ideo rectangulum ex A G E in E H maius erit quadrato ex G E.

LEMMA IV.

IIsdem positis sit A H maior, sed E H minor eadem M H semisse totius M G: Dico quod si proportio ipsius A G ad G E fuerit eadem rationi G H ad H E, erit



rectan-

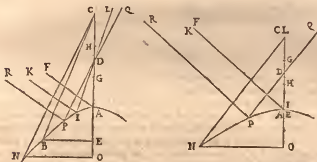
rectangulum sub A G E in E H æquale quadrato ex G E, & si proportio illa maior fuerit, erit quoque rectangulum maius quadrato; & si illa proportio minor fuerit, Rectangulum quadrato minus erit.

Et primo, quia A G ad G E ponitur vt G H ad H E; componendo A G E ad G E, erit vt G E ad E H, & rectangulum sub extremis contentum, nimirum sub A G E in E H, æquale erit quadrato ex intermedia G E.

Secundo, si A G ad G E maiorem proportionem habuerit, quàm G H ad H E, componendo A G E ad G E maiorem proportionem habebit, quàm G E ad E H, & ideo Rectangulum sub A G E in E H maius erit quadrato ex G E. pari ratione si A G ad G E minorem proportionem habuerit, quàm G H ad H E, ostendetur Rectangulum ex A G E in E H minus quadrato G E.

LEMMA V.

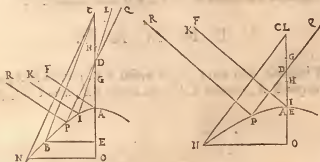
IN hyperbola, cuius axis C A, & erectus A F, præsecta H A, intercepta G A, diameter L I, cuius erectus I K, latus C E, &



diameter Q P, cuius erectus P R, latus C O: Dico quod erectus P R ab ipso erecto I K, vel ab A F atque rectangulum sub O G E in G H ab ipso quadrato G E, vel rectangulum ex O G A in A H ab ipso quadrato G A, vna deficiunt, vel vna æqualia sunt, aut vna excedunt.

Et primo ponatur rectangulum sub O G E in E H æquale quadrato E G, ergo idem rectangulum sub O G E in E O ad rectangulum sub E G O in E H, seu E O ad E H eandem proportionem habet, quàm ad quadratum G E, & propterea E O ad E H erit vt rectangulum sub E G O in E O ad quadratum E G,

G E, & componendo O H ad E H, seu rectangulum O H A ad rectangulum E H A, erit vt rectangulum sub G E, & G O in O E vna cum quadrato E G, seu vt quadratum ex O G ad quadratum ex G E, & permutando rectangulum A H O ad quadratum O G, erit vt rectangulum E H A ad quadratum G
15. huius. *E, sed vt rectangulum O H A ad quadratum O G, ita est quadratum A C ad*
ex Def. & *quadratum P K, & vt rectangulum E H A ad quadratum ex G E, seu vt*
15. huius. *quadratum A C ad quadratum A F, vel ex I K; quapropter idem quadratum A C ad quadratum ex P K, atque ad quadratum ex A F vel I K eandem proportionem habet, & ideo quadrata ipsa aequalia sunt, & eorum latera P K; & A F, vel I K pariter aequalia erunt.*



Eodem modo quando rectangulum sub O G E in E H maius est quadrato G E, tunc quidem idem rectangulum, cuius altitudo O G E, basis vero O E, ad rectangulum, cuius altitudo O G E, basis verò E H, seu O E ad E H, minorem proportionem habebit, quàm ad quadratum E G, & componendo, atque permutando, vt prius factum est, habebit rectangulum O H A ad quadratum O G, siue quadratum A C ad quadratum P K minorem proportionem, quàm
15. huius. *rectangulum E H A ad quadratum G E, seu quàm quadratum A C ad quadratum A F, vel I K, & propterea P K maior erit, quàm A F, vel I K.*

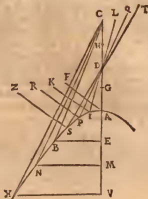
Quando verò rectangulum sub E G O in E H minus est quadrato E G, tunc quidem ostendetur eodem progressu quadratum P K minus esse quadrato A F, vel I K, quod erat propositum.

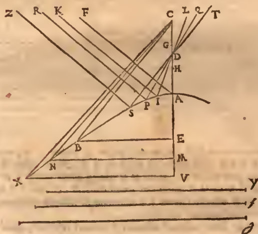
Notæ in Propos. XXXIII. & XXXIV.

Def. 2. huius. *Q Voniam ex hypotesi C A minor non est medietate ipsius A F, estque A H ad A G, vt C A, ad A F, ergo A H maior, aut aequalis est medietati ipsius A G, & ideo A H maior, aut aequalis est residuo H G, quare E H,*

E H, atque eius portio A H non minores sunt eadem G H; ergo rectangulum sub E G A in A H maius erit quadrato A G, atque I K maior erit quàm A F. Lem. 3. huius. Lem. 5.

Simili modo, quia tam M H, quam E H excedunt ipsam G H, erit rectangulum sub M G E in E H maius quadrato A G, atque P R maior, quam I K. Lem. 3. huius. Lem. 5. huius.





Notæ in Proposit. XXXV.

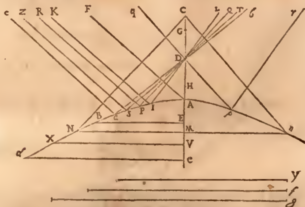
Q Via ex hypotesi axis A C minor est semi A F, erit A H minor medietate ipsius A G, & ideo A H minor erit H G: fiat igitur M H æqualis HG, & per M (quæ intra sectionē cadet) ad axim ordinatim applicata

 duca-

ducatur N n occurrens sectioni in N, & n, à quibus iungantur N C, n C, & eis æquidistantes diametri P Q, & p q extendantur, quarũ erecta P R, & p r. Ostendendum est P Q subduplam esse ipsius P R, atq; P R, & p r æquales esse inter se, & minima esse erectorum quarumlibet Diametrorum eiusdem sectionis.

Prop. 6. huius. *Quoniam vt H M ad M G ita est P Q ad P R, & p q ad p r, erat autem H M subdupla ipsius M G, ergo Diameter P Q subdupla est erecti eius P R, pariterque p q subdupla est ipsius p r: atque Diametri P Q, & p q æquales sunt inter se, cum æque recedant ab axi A C, atque earum commune latus sit C M. Postea quia tam E H, quàm M H maiores non sunt eadem H M, vel*

Lem. 2. huius. *G H, ergo rectangulum sub M G E in E H minus est quadrato E G, & ex lem. 5. P R minor est I K.*



Lem. 2. & 5. hui. *Similiter quia tam E H, quàm A H minor est eadem H M, ergo rectangulum sub E G A in A H minus est quadrato A G, & I K minor erit, quàm A F. tandem, quia tam V H, quàm M H non est minor eadem G H, ergo rectangulum V G M in M H maius erit quadrato G M, & ideo S Z maior erit,*

Lem. 3. Lem. 5. *quàm P R, & sic vlterius: quare P R minimum est laterum rectorum quarumlibet Diametrorum eiusdem hyperboles.*

PROP. 1. Addit. *In hyperbole latus rectum alicuius Diametri reperire, quod æquale sit lateri recto axis; sed oportet, vt axis transuersus A C minor sit medietate eius erecti A F.*

ex 35. hu. *Reperiatur Diameter P Q, quæ subdupla sit eius erecti P R, sitque C M latus, & fiat e G ad G A, vt M H ad H A, & ducatur ordinatim applicata ad axim e d, coniungaturque recta d C, & extendatur diameter a b parallela ipsi d C, cuius latus rectum sit a c. Dico a c æquale esse A F: quia e G*

Lem. 4. huius. Lem. 5. huius. *ad G A facta fuit vt M H, siue G H ad H A, ergo rectangulum sub e G A in A H æquale est quadrato G A, ideoque erectum a c æquale erit erecto A F, quod erat propositum.*

Dato

Dato latere recto I K diametri hyperboles I L reperire latus rectum alterius Diametri, quod æquale sit lateri recto I K: oportet autem, vt Diameter I L cadat inter axim, & aliam Diametrum, quæ subdupla sit sui erecti. PROP. 2. Addit.

Reperiatur Diameter Q P, quæ subdupla sit sui erecti P R, eiusque latus sit M C; ergo ex hypothesi I L cadet inter axim A C, & Diametrum P Q, & propterea terminus E lateris C E cadet inter A, & M, igitur reperiri poterit V G, quæ ad G E eandem proportionem habeat, quàm maior M H ad minorem H E, & vt prius, lateris C V ducatur diameter S T, cuius latus rectum S Z: dico S Z æquale esse I K: quia V G ad G E est, vt M H, seu G H ad H E, ergo rectangulum sub V G E in E H æquale est quadrato G E, ideoque S Z æquale I K; quod erat propositum. ex 35. hu. Lem. 4. huius. Lem. 5. huius.

Deducitur ex prima propositione additarum quod in aliqua hyperbola reperiri possunt tria diametrorum latera recta æqualia inter se; si nimirum in hyperbola, cuius axis C A minor sit medietate eius lateris recti, reperiantur vtrinque duæ diametri b a*, quarum latera recta* a c *æqualia sint ipsi A F; tunc quidem tria illa latera recta æqualia erunt inter se: reliqua verò latera recta diametrorum cadentium inter A, &* a *maiora erunt latere recto A F; & latera recta diametrorum cadentium vltra punctum* a *ad partes B maiora sunt latere recto* a c*, propterea quod magis recedunt ab omnium minimo latere recto P R.* ex 35. huius.

Simili modo in eadem hyperbola reperiri possunt quatuor diametrorum latera recta æqualia inter se, si nimirum ex secunda propositione additarum dato latere recto I K diametri I L reperiatur æquale latus rectum S Z alterius diametri S T, & ex altera parte axis ducantur duæ aliæ diametri æquè ab axi remotæ ac illæ, erunt quatuor recta latera earum æqualia inter se, & maiora quolibet latere recto diametri cadentis inter I, & S ad vtrasque partes axis: minora verò erunt quolibet latere recto diametri cadentis vltra punctum I ad partes verticis A, vel infra puncta S ad partes a*, vt deducitur ex 35. huius.*

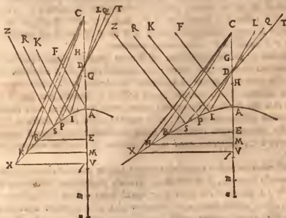
SECTIO SEPTIMA

Continens Proposit. XXXVIII. XXXIX. & XXXX.

PROPOSITIO XXXVIII.

IN hyperbole axis inclinatus si non fuerit minor triente erecti ipsius, erunt duo latera figuræ axis minora, quàm duo latera figuræ cuiuslibet inclinatæ coniugatarum, quæ in eadem sectione consistunt, & duo latera figuræ inclinati proximioris axi minora sunt, quàm duo latera figuræ remotioris inclinati.

Si verò fuerit axis minor parte tertia sui erecti assignari poterunt ad vtrasque eius partes duo æquales diametri, quarum quælibet pars tertia sit sui erecti, atque duo latera figuræ eiusdem minora sunt duobus lateribus figuræ cuiuslibet alterius diametri ad vtrasque eius partes in eadem sectione cadentis: & duo latera figuræ diametri ei propinquiores minora sunt duobus lateribus figuræ remotioris.



In eadem figura supponatur prius hyperboles axis A C non minor suo erecto, erit P Q maior quàm A C, & S T maior quàm P Q: ideoquè erectus ipsius A C minor erit erecto ipsius P Q (33. ex 7.), & erectus ipsius P Q minor est erecto ipsius S T; igitur duo latera figuræ A C minora sunt, quàm duo latera figuræ P Q, & duo latera figuræ P Q minora, quàm duo latera figuræ S T.

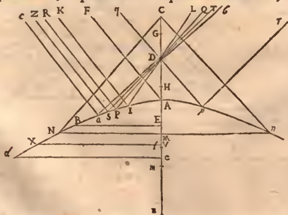
PROPOSITIO XXXIX.

DEinde sit A C minor quàm A F, sed non sit minor tertia parte eius; igitur A H non erit minor tertia parte ipsius H C: & propterea non est minor quadranre ipsius A C; ideoque C A in A H non est minus quarta parte quadrati A C; quare C A in A M quater sumptum ad C A in A H quater, nempe M A ad A H non habet maiorem proportionem, quàm quadruplum ipsius A C in A M ad quadratum A C. Et ponamus M *m* æqualem M A, componendo M H, ad H A, nempe M H in H A ad quadratum H A non habebit maiorem proportionem, a

tionem, quàm C M in M A quater sumptum vna cum quadrato C A: nempe quàm quadratum C *m* ad quadratum A C; ideoque M H in H A ad quadrarum H A minorem proportionem habet quàm quadratum C *m* ad quadratum A C. Et permutando M H in H A ad quadratum C *m*, seu ad quadratum ex summa ipsarum G M; & M H, ad quod habet eandem proportionem quàm quadratum C A ad quadratum summæ P Q, & P R (17. ex 7.) habebit minorem proportionem, quàm quadratum A H ad quadratum A C, seu quàm quadratum A C ad quadratum summæ ipsarum A C, & A F; igitur summa ipsarum A C, & A F minor est quàm summa ipsarum P Q, & P R. Et quia M H maior est quarta parte summæ ipsarum M G, & M H; ergo quadruplum C *m* in M H maius est quadrato C *m*, & ponatur V *n* æqualis A V; igitur quadruplū V M in C *m* ad quadruplum M H in C *m*, scilicet V M ad M H minorem proportionem habebit, quàm quadruplum V M in C *m* ad quadratum C *m*: & componendo V H ad H M, nempe V H in H A ad M H in H A minorem proportionem habebit, quàm V M in C *m* quater sumptum, vel *n m* in *m* C bis sumptum cum quadrato C *m* (eo quod *n m* dupla est ipsius V M quæ omnia simul ad idem quadratum C *m* minorem proportionem habet, quàm quadratum C *n*. Ergo V H in H A ad quadratum C *n*, scilicet quadratum A C ad quadratum summæ ipsarum S T, & S Z (17. ex 7.) minorem proportionem habet quàm M H in H A ad quadratum C *m*, seu qnàm quadratum A C ad quadratum summæ ipsarum P Q, P R (17. ex 7.) quapropter P Q, & P R simul sumptæ minores sunt, quàm S T, & S Z simul sumptæ.

PROPOSITIO XXXX.

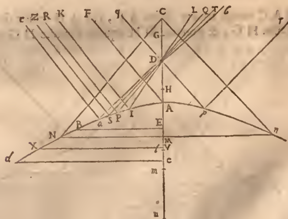
Sit A C minor triente ipsius A F, erit A H minor dimidio ipsius H G, & ponatur M H æqualis dimidio H G, & du-



eamus

camus perpendicularem, & diametrum. Dico, quod P Q æqualis est trienti ipsius P R.

Educamus inter P Q, A C diametrum I L, & educamus C B ei æquidistantem, & perpendicularem B E, & secemus E *l* æqualem E A erit summa ipsarum G E, & E H æqualis C *l*; estque H E minor quàm M H, quæ quarta pars est ipsius C *m*; ergo summa ipsarum M G, H E in M H quater sumptum minus est quadrato C *m*: auferatur communiter M G, H E in M E quater sumptum remanebit quadruplum summæ M G, H E in H E minus quàm quadratum C *l* (quia M G, H E simul sumptæ, nempe M C vna cum A E in M E quater sumptum æquale est quadrato *l m*; quod est duplum M E, & aggregatum C E, A E, nempe C *l* in *l m* bis sumptum) igitur aggregatum M G, & H E in M E quater sumptum ad aggregatum M G, H E in H E quater sumptum, nẽpe G E ad H E maiorem proportionem habebit, quàm ad quadratum *l* C. & componendo M H ad H E, seu M H in H A ad E H in H A habebit maiorem proportionem, quàm M G, H E in M E quater sumptum cum quadrato *l* C (quæ æqualia sunt quadrato C *m*) ad quadratum *l* C: & permutando erit M H in H A ad quadratum C *m*, nempe ad quadratum summæ ipsarum M G, & M H, seu quadratum A C ad quadratum summæ ipsarum P Q, P R (17. ex 7.) maiorem proportionem habebit, quàm E H in H A ad quadratum *l* C (quod est æquale quadrato summæ ipsarum G E, E H) quod erit vt quadratum A C ad quadratum aggregati ipsarum I L, I K: quapropter A C ad duo latera figuræ P Q maiorem proportionem habet, quàm ad duo latera figuræ I L. Et propterea duo latera figuræ P Q minora sunt, quàm duo latera



figuræ

figuræ I L. Simili modo ostendetur, quod duo latera figuræ I L minora sunt, quàm duo latera figuræ A C.

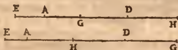
Educamus postea C X extra segmentum A N; & educamus diametrũ S T ei parallelam, & ad axim perpendicularem X V, erit aggregatum G V, M H in M H quater sumptum maius quàm quadratum C *m*; & addamus communiter aggregatum M H, G V in M H quater sumptum; ostendetur vt antea, quod duo latera figuræ S T maiora sunt, quàm duo latera figuræ P Q.

Ostendetur quoque in reliquis diametris cadentibus ad vtrasque partes ipsius P Q in eadem sectione, quod duo latera figuræ diametri ipsi P Q proximioris minora sunt, quàm duo latera figuræ remotioris.

In Sectionem VII. Proposit: XXXVIII. XXXIX. & XXXX.

LEMMA VI.

Si recta linea H G bifariam secta in D producatur vtcumque ad A, & E, ita vt D H non maior sit quàm H E, vel H A, & E D maior sit, quàm D A: dico rectangulum sub E D A in H A maius esse quadrato D A.



Quia E D maior ad minorem D A habet maiorem proportionem, quàm D H non maior ipsa H A, ad H A, ergo componendo E D A ad D A maiorem proportionem habet, quàm D A ad A H, & propterea rectangulum sub extremis contentum, scilicet sub E D A in A H, maius est quadrato D A.

LEMMA VII.

Iisdem positis, si D H non minor fuerit quàm H A, vel H E, sitque H E maior, quàm H A: dico rectangulum sub E D A in A H minus esse quadrato D A.

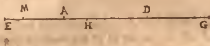


Fiat

Fiat H M æqualis maiori H D, erit E A differentia minima H A, & intermedia H E minor, quàm M A, quæ est differentia maxima M H, & minima H A, & A D maior est quàm A H, ergo E A ad M A minorem proportionem habet, quàm D A ad A H, & permutando E A ad A D habebit minorem proportionem, quàm M A ad A H, & componendo E D ad D A minorem proportionem habebit, quàm M H, siue D H ad A H, & iterum componendo E D A ad D A minorem proportionem habebit, quàm eadem D A ad A H, & propterea rectangulum sub E D A in A H minus erit quadrato D A.

LEMMA VIII.

IIsdem positis si D H maior fuerit, quàm A H sed minor quàm E H, fueritque proportio E A ad A D eadem proportioni M A ad A H, dico rectangulum sub E D A in A H æquale esse quadrato D A: si verò proportio illa maior fuerit, vel minor rectangulum similiter quadrato maius, vel minus erit.



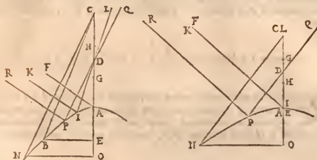
Quia E A ad A D ponitur vt M A ad A H, componendo E D ad D A, erit vt M H, seu D H ad H A, & iterum componendo E D A ad D A, erit vt D A ad A H, & propterea rectangulum sub E D A in A H æquale erit quadrato D A.

Quando verò E A ad A D maiorem proportionem habet, quàm M A ad A H, tunc bis componendo E D A ad D A maiorem proportionem habebit, quàm D A ad A H, & propterea rectangulum sub extremis; scilicet sub E D A in A H maius erit quadrato intermedia D A: non secus quando E A ad A D minorem peoportionem habet, quàm M A ad A H, ostendetur rectangulum sub E D A in A H minus quadrato ex D A.

LEMMA IX.

IN hyperbola, cuius axis A C, erectus A F, præsecta H A, intercepta G A, centrum D, diameter I L, eiusque erectus I K, & C E sit latus eiusdem, sitque diameter Q P, cuius erectus P R, & latus L O: dico quod rectangulum sub O D E in E H ab ipso quadrato D E, atque Q P R summa laterum figuræ Diametri P Q ab L I K summa laterum figuræ I L, vel ab ipsa C A F summa laterum figuræ axis, vna deficiunt, vel vna æqualia sunt, aut vna excedunt.

Et



Et primo rectangulum sub O D E in E H æquale sit quadrato D E, ergo ad hæc duo spatia æqualia eandem proportionem habebit idem rectangulum sub E D O in O E, sed vt rectangulum sub E D O in O E ad rectangulum sub E D O in E H, ita est O E ad E H, (propterea quod æquales altitudines habent), igitur vt O E ad E H, ita est rectangulum sub E D O in O E ad quadratum D E, & componendo O H ad E H, siue rectangulum O H A ad rectangulum E H A eandem proportionẽ habebit, quàm rectangulum sub E D O in O E vna cum quadrato D E, seu quàm quadratum D O ad quadratum D E, vel potius vt quadratum ex dupla D O ad quadratum ex dupla D E, nempe vt quadratum ex G O H ad quadratum ex G E H, quare permutando rectangulum O H A ad quadratum ex G O H eandem proportionem habebit, quàm rectangulum ex E H A ad quadratum ex G E H, seu vt quadratum ex A C ad quadratum ex C A F, vel ex L I K; sed vt rectangulum A H O ad quadratum ex G O H, ita est quadratum ex A C ad quadratum ex Prop. 16. huius. Ibidem. *Q P R: quare idem quadratum A C eandem proportionem habet ad quadratum ex Q P R, quam ad quadratum ex C A F, vel ex I K L, & propterea quadrata ipsa æqualia sunt, & summa laterum Q P R æqualis est summæ laterum C A F, vel I L K.*

Secundo sit rectangulũ sub E D O in E H maius quadrato D E, tunc quidem idem rectangulum sub E D O in O E ad rectangulum sub O D E in E H minorem proportionẽ habebit, quàm ad quadratum ex D E, seu O E ad E H minorem proportionem habebit, quàm ad quadratum ex D E; & componendo sumpta eadem altitudine H A, quadruplicando postrema quadrata, & permutando, & ex 16. huius, idem quadratum A C ad quadratum ex Q P R minorem proportionem habebit, quàm ad quadratum ex C A F, vel ex L I K, & propterea summa Q P R maior erit, quàm C A F, seu quàm L I K.

Tertio sit rectangulum sub E D O in E H minus quadrato D E, patet quod idem rectangulum sub E D O in O E ad rectangulum sub E D O in E H, seu O E ad E H maiorem proportionem habet, quàm ad quadratum D E, & componendo ductis prioribus terminis in A H, quadruplicando postrema quadrata,

 permu-

permutando vt prius, idem quadratum A C ad quadratum ex Q P R, maiorem proportionem habebit, quàm ad quadratum ex C A F, seu ex L I K, & propterea summa Q P R minor erit, quàm C A F, vel L I K, quæ erat ostendenda.

Notæ in Proposit. XXXVIII. XXXIX.

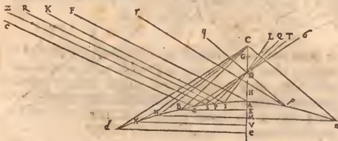
Q*Via axis C A minor non est triente eius erecti A F, estq; H A ad A G vt C A ad A F, ergo H A æqualis, aut maior est parte tertia ipsius A G; & A H æqualis, aut maior erit, quàm semissis ipsius H G differentiæ illarum, estque G H secta bifariam in D, ergo H A æqualis, aut maior erit,*

Lem. 6. *quàm D H, estque H E maior quàm H A, ergo pariter H E maior est, quàm D H, quare rectangulum sub E D A in A H maius erit quadrato D A, atque*
Lem. 9. *summa laterum figuræ L I K maior, quàm summa laterum figuræ axis C A F. Similiter quia H M maior est, quàm H E, erit quoque H M maior, quàm D H, & propterea ex lemma 6. & 9. summa Q P R maior erit, quàm summa L I K.*

Notæ in Proposit. XXXX.

Q*Via C A minor est triente ipsius A F, estque H A ad A G vt C A ad A F, ergo H A minor est tertia parte ipsius A G, & minor semisse differentia*

rentiæ H G, & ideo H A minor erit, quàm H D: secari ergo poterit H M æqualis D H, quæ maior erit, quàm A H, ducaturq; per M ad axim ordinatim applicata N M n occurrens sectioni in punctis N n, à quibus iungãtur C N, & C



n, ijsdemque æquidistantes ducantur duæ diametri P Q, & p q, quarum latera recta P R, & p r. Ostendendum est P Q sui erecti P R, atque p q sui erecti p r subtriplam esse, sed duo figuræ latera P Q; P R æqualia esse alterius figuræ lateribus p q, p r, & insuper P Q, P R minima esse laterum figuræ cuiuslibet alterius diametri eiusdem sectionis, & latera figurarum minimis proximiora, esse minora lateribus figurarum remotiorum.

Quia H M ad M G eandem proportionem habet quàm P Q ad P R, vel p q ad p r, estque H M subtripla ipsius M G (cum M H facta sit æqualis H D) ergo P Q ipsius P R, pariterque p q ipsius p r subtripla est: & sunt latera figuræ Q P R æqualia lateribus q p r alterius figuræ, cum diametri Q P; & q p æquè recedant ab axi, & habeant latus commune C M. Prop. 6. huius.

Quod verò summa laterum figuræ Q P R minima sit reliquarum summarũ laterum figuræ cuiuslibet diametri sic ostendetur.

Quia A H, & E H minora sunt, quàm H M, siue D H, ergo rectangulum sub E D A in A H minus est quadrato D A, & summa L I K minor est summa C A F. Lem. 7. Lem. 9.

Pariter quia M H æqualia est H D, & H E minor eadem, ergo ambo non erunt maiores eadem D H, ergo rectangulum sub M D E in E H minus erit quadrato D E, atque summa Q P R minor erit, quàm L I K. Lem. 7. Lem. 9.

Rursus quia V H maior, est quàm M H, seu quàm D H, erunt illæ non minores eadem D H, ergo rectangulum sub V D M in H M maius erit quadrato D M, atque summa T S Z maior erit, quàm summa Q P R. Lem. 6. Lem. 9.

In hyperbola reperire diametrum, cuius figuræ latera æqualia sint lateribus figuræ axis: oportet autem vt axis A C minor sit triente erecti eius. Reperiatur diameter P Q subtripla erecti eius P R, eiusque latus sit C M, & fiat e A ad A D, vt M A ad A H, & lateris C e ducatur diameter a b, cuius erectus a c. Dico hanc esse diametrum quæsitam: quia e A ad A D eandem proportionem habet, quàm M A ad A H, erit rectangulum sub e D A in A H PROP. 3. Addit. ex 40. huius.

 æquale

Lem. 8. Lem. 9. *æquale quadrato D A, & summa laterum* b a c *æqualis erit laterum figuræ axis summæ C A F.*

PROP. 4. Addit. *In eadem hyperbola data diametro I L reperire aliam diametrum, ita vt eius figuræ latera æqualia sint lateribus figuræ datæ diametri I L: oportet autem vt I L cadat inter axim, & diametrum P Q subtriplam eius erecti. Sit*
ex 40. huius. *C E latus diametri I L, & C M, sit latus diametri P Q, & quia punctum E cadit inter M, & A, erit H E minor, quàm H M, vel D H: fiat V E*
Lem. 8. *ad E D, vt M E ad E H, ergo rectangulum sub V D E in E H æquale erit quadrato E D, & ex lemma 9. summa laterum T S Z æqualis erit summæ laterum L I K; quod erat propositum.*

Facile colligitur ex 3. additarum, quod in hyperbola cuius axis subtripla sit erecti eius assignari possunt tres summæ laterum figurarum trium Diametrorum quæ æquales sint inter se. Ex 4. verò additarum in eadem Hyperbola assignari, possunt quatuor summæ laterum figurarum quatuor diametrorum, quæ æquales sint inter se.

Deinde sit A C minor, quàm A F, sed non sit minor eius triplo, ergo A H non erit minor triplo H C, &c. *Textus mendosus omnino corrigi debuit, nam ex contextu sequenti deducitur A C non tripla minor, sed minor parte tertia supponi debere ipsius A F.* a

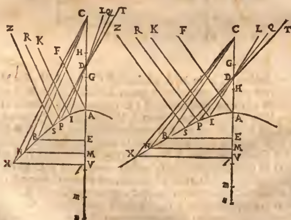
SECTIO

SECTIO OCTAVA

Continens Proposit. XXXXIIII. XXXXV. & XXXXVI.

IN hyperbole si quadratum axis inclinati minus non fuerit dimidio quadrati ex differentia ipsius, & sui erecti, vtique quadratum diametri figuræ eius minus est, quàm quadratum diametri figuræ cuiuscumque alterius inclinati eiusdem sectionis.

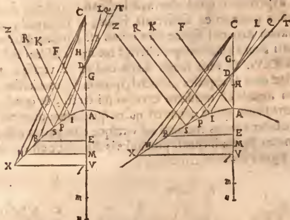
XXXXVI. Si verò minus fuerit cadent ad vtrasque partes eius duæ inter se æquales diametri, quarum vniuscuiuslibet quadratum æquale est quadrato excessus sui erecti, & quadratum diametri figuræ ipsius minus est quàm quadratum diametri figuræ cuiuslibet alterius inclinati ad vtrasque eius partes cadentis: & diameter figuræ inclinati proximioris illi minor est quàm diameter figuræ inclinati remotioris.



Iisdem figuris manentibus supponatur prius A C non minor quàm A F; ergo P Q non erit minor quàm P R (28. ex 7.) & duo quadrata A C, A F nempe diameter figuræ A C minor est quàm diameter figuræ P Q; & Demonst. prop. 44.

Q; & pariter diameter figuræ P Q minor est, quàm diameter figuræ S T. Sit iam A C minor quàm A F, & eius quadratum non minus dimidio quadrati excessus ipsius A F super A C. Et quia A C ad A F eandem proportionem habet, quàm A H ad A G; ergo duplum quadrati A H non est minus quadrato H G; ergo M H in H A bis sumptum maius est quadrato H G, & addatur communiter duplum G A in A H fiet duplum summæ G A, M H, vel C M in A H maius quàm duplum G A in A H cum quadrato H G, seu quàm quadratum G A cum quadrato A

Demonst. prop. 45.

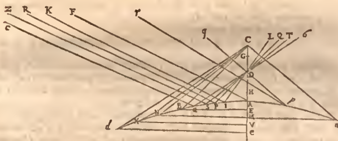


H: quare duplum C M in M A ad duplum C M in A H, seu M A ad A H minorem proportionem habet, quàm duplum C M in M A ad quadratum G A vna cum quadrato A H: & componendo habebit M H ad H A, seu M H in H A ad quadratum A H minorem proportionem quàm duplum C M in M A cum duobus quadratis ipsarum G A, & A H (quæ omnia simul æqualia sunt quadrato M G cum quadrato M H) ad quadratum A G cum quadrato A H: & permutando M H in H A ad quadratum G M cum quadrato M H (nempe quadratum A C ad duo quadrata laterum figuræ P Q) siue ad quadratum diametri figuræ P Q (17. ex 7.) minorem proportionem habebit, quàm quadratum H A ad quadratum A G cum quadrato A H, seu quàm quadratum A C ad quadratum diametri figuræ eius; igitur quadratum A C ad diametrum figuræ P Q minorem proportionem habet, quàm ad diametrum figuræ A C: & ideo diameter figuræ P Q maior erit diametro figuræ A C. Præterea, quia duplum quadrati M H maius est quadrato H G; ergo V H in M H bis maius erit, quàm quadratum H G: & ostendetur (quemadmodum diximus) quod diameter figuræ S T maior sit quàm diameter figuræ P Q.

PROP.

PROPOSITIO XXXXVI.

Sit postea quadratum A C minus dimidio quadrati ex differentia ipsarum C A, & A F; erit duplum quadrati A H minus quadrato H G & ponamus duplum quadrati M H æquale quadrato H G: & educamus ad axim perpendicularem N M, & iungamus N C; & ducamus diametrum P Q parallelã ipsi N C, erit H M ad M G, vt P Q ad P R, & pro-
a pterea quadratum P Q dimidium erit quadrati excessus ipsius P R; ergo P Q est vna æqualium: ponatur insuper inter A, & P diameter I L, & constructio perficiatur, vt prius. Et quia duplum quadrati M H æquale est quadrato H G, erit duplum M H in H E minus quadrato H G, & ponatur communiter duplum G E in E H; igitur duplum aggregati M G in E H minus est quadrato G E cum quadrato E H; & ostendetur quemadmodum diximus antea, quod quadratum diametri figuræ P Q minus sit quadrato diametri figuræ I L; & quadratum diametri figuræ I L minus sit quadrato diametri figure A C. 6. huius.



Deindè ducatur diameter inclinata S T extra segmentum A P, & C X ei parallela, & ad axim perpendicularis X V: & quia duplum quadrati M H æquale est quadrato H G erit duplum V H in H M maius quadrato H G: ponatur communiter duplum G M in M H, fiet duplum aggregati V G, M H, in M H maius quadrato M G cum quadrato M H: quare duplum aggregati V G, & M H in M V ad duplum aggregati V G, & M H in M H, nempe M V ad M H minorem proportionem habebit, quàm duplum aggregati V G, & M H in M V ad quadratum G M cum quadrato M H: & componendo ostendetur (quemadmodum antea dictum est) quod quadratum A C ad diametrum figuræ P Q maiorem proportionem habeat, quàm ad diametrum figuræ S T. Eadem prorsus cõtingent in reliquis omnibus diametris. Quapropter diameter figuræ P Q minor est diametro figuræ cuiuslibet diametri ad vtrasque eius partes in eadem sectione existente. Quod erat ostendendum.

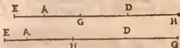
In

In Sectionem VIII. Proposit. XXXXIIII. XXXXV. & XXXXVI.

LEMMA X.

SI rectæ lineæ G H bifariam sectæ in D addantur segmenta H A, & H E atque proportio dupli E H ad H G eadem fuerit proportioni G H ad H A: dico duplum rectanguli ex G A, & H E in H A æquale esse quadratis ex G A, & ex A H: si verò proportio illa maior fuerit, erit quoque rectangulum maius quadratis: si verò proportio fuerit minor, rectangulum minus erit quadratis.

Primo quia si duplum E H ad H G, est vt G H ad H A, ergo duplum rectanguli E H A æquale erit quadrato G H, & addatur communiter duplum rectanguli G A H, erit duplum rectanguli ex summa G A, & E H in A H æquale duplo rectanguli G A H cum quadrato G H; his verò spatijs æquantur quadrata ex G A, & ex A H, ergo duplum rectanguli ex summa G A, E H in A H æquale erit duobus quadratis ex G A, & ex A H.



Secundo, quia duplum E H ad H G, maiorem proportionem habet, quàm G H ad A H, ergo duplum rectanguli E H A maius est quadrato G H, & addito communiter duplo rectanguli G A H, erit duplum rectanguli ex G A, E H in A H maius duobus quadratis ex G A, & ex A H.

Tertio, quia duplum E H ad H G minorem proportionem habet, quàm G H ad A H, ergo duplum rectanguli E H A minus est quadrato G H, & addito duplo rectanguli G A H, erit duplum rectanguli ex G A, E H in A H minus quadratis ex G A, & ex A H.

LEMMA XI.

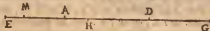
SI recta linea G H secetur exterius in A, E, & sit eadem G H differentia nedum segmentorum G E, & E H, sed etiam duorum segmentorum G A, & A H: dico quod quadrata ex maximo, & ex vno intermediorum segmentorum, scilicet ex G E, & ex E H æqualia sunt quadratis ex reliquo intermediorum, & ex minimo segmento, scilicet ex G A, & ex A H vna cum duplo rectā-



guli

guli ex summa extremorum, vel intermediorum in differentiam minimorum segmentorum, scilicet ex G A cum H E in E A.

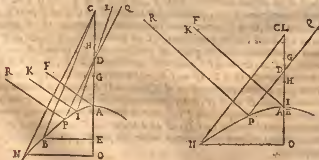
Quia duplum rectanguli G A H cum duplo rectanguli G A E aequatur duplo rectanguli sub G A in H E, addito cõmuniter duplo rectanguli H E A erit duplum rectanguli G E H aequale duplo rectanguli G A H cum duplo rectanguli ex summa G A, H E in E A; & addito communi quadrato G H, erit duplum rectanguli G E H cum quadrato G H, scilicet duo quadrata ex G E, & ex E H, erunt aequalia illis omnibus spatijs, scilicet duplo rectanguli ex summa G A, H E in E A cum duplo rectanguli G A H simul cum quadrato ex G H: sed duplo



rectanguli G A H cum quadrato G H aequalia sunt duo quadrata ex G A, & ex A H, ergo duo quadrata ex G E, & ex E H aequalia erunt quadratis ex G A, & ex A H cum duplo rectanguli ex G A; & H E in E A, quod erat ostendendum.

L E M M A XII.

IN hyperbola, cuius axis A C, erectus A F, praesectae C G, H A, centrum D, atque diameter I L, eiusque erectus I K, & latus C E, pariterque altera diameter Q P, cuius erectus P R, & latus C O: dico quod duplum rectanguli ex G E cũ O H in H E à duobus quadratis ex G E, & ex E H; nec non quadrata Q P, & P R laterum figurae diametri Q P à quadratis ex L I, & ex I K, vel ex C A, & ex A F, vna deficiunt, aut vna aequalia sunt, vel vna excedunt.

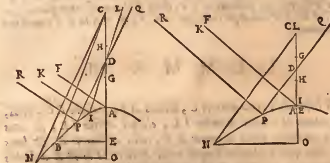


Quia duplum rectanguli ex G E, O H in H E æquale est quadratis ex G E & ex E H, ergo idem rectangulum, cuius altitudo G E, & O H, basis verò O E bis sumptum ad duplum rectanguli, cuius altitudo G E, O H, basis verò H E, seu O E ad H E eandem proportionem habet, quàm duplum rectanguli ex G E, & O H in O E ad quadrata ex G E, & ex E H: quare componendo O H ad E H, seu O H A ad E H A eandem proportionem habebit, quàm duo quadrata ex G O, & ex O H ad duo quadrata ex G E, & ex E H, & permutando O H A ad quadrata ex G O, & ex O H, seu quadratum ex A C ad quadrata ex Q P, & ex P R eandem proportionem habebit, quàm rectangulũ E H A ad quadrata ex G E, & ex E H, seu erit vt quadratum A C ad quadrata ex I L, & ex I K, vel ad quadrata ex C A & ex A F: quare duo quadrata ex Q P, & ex R P æqualia sunt duobus quadratis ex I L, & ex I K, vel ex C A, & A F.

Lem. 11. huius.

17. huius.

Ibidem.



Secundo quia duplum rectanguli ex G E, O H in H E minus ponitur quadratis ex G E, & ex E H, igitur idem spatium scilicet duplum rectanguli ex G E, & O H in O E ad duplum rectanguli ex G E, & O H in H E, siue O E ad H E maiorem proportionem habet, quàm duplum rectanguli ex G E, O H in O E ad quadrata ex G E, & O H, & vt prius componendo, ex lemmate 11. & permutando, ex 17. huius; idem quadratum A C ad quadrata ex Q P, & ex P R maiorem proportionem habebit quàm ad quadrata ex I L, & ex I K, vel ad quadrata, ex C A, & ex A F: quapropter quadrata ex Q P, & ex P R minora erunt quadratis ex I L, & ex I K, vel quadratis ex C A, & ex A F.

Tertio quia duplum rectanguli ex G E, O H in H E maius est summa quadratorum ex G E, & ex E H, igitur, eodem progressu, habebit quadratum A C ad summam quadratorum ex Q P, & ex P R minorem proportionem, quàm ad summam quadratorum ex I L, & ex I K, vel ex C A, & ex A F: & propterea summa priorum quadratorum maior erit summa posteriorum, vt fuerat propositum.

Nota

Notæ in Proposit. XXXXIV. & XXXXV.

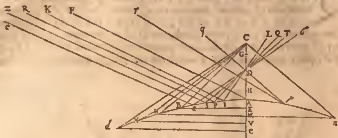
Quia C A maior est, quàm A F, vel si minor est quadratum ex C A, minor non est dimidio quadrati ex differentia C A, & A F, estque H A ad A G vt A C ad A F, & H A ad G H, vt A C ad differentiam ipsarum A C, A F, ergo quadratum H A ad dimidium quadrati G H erit vt quadratum A C ad dimidium quadrati ex differentia ipsarum A C, & A F, quare quadratum ex H A minor non erit semisse quadrati H G, ideoq; duplum quadrati A H minor non erit quadrato H G, estque duplum rectanguli E H A, vel M H E maius duplo quadrati A H, seu maius quadrato H G; propterea duplum E H ad H G maiorem proportionem habebit, quàm G H ad H A, ideoque duplum rectanguli ex G A, H A in A H maius erit quadratis ex G A, & ex A H, & insuper summa quadratorum ex I L, & ex I R maior erit, quàm summa quadratorum ex C A, & ex A F. Lem. 10. Lem. 12.

Notæ in Proposit. XXXXVI.

Quia quadratum axis C A minus est semisse quadrati ex differentia ipsarum A C, & A F, estque H A ad A G, vt C A ad A F, atque G H est differentia ipsarum A H, & A G, igitur quadratum ex A H

 minus

minus est semisse quadrati G H: fiat iam quadratum ex M H æquale semiquadrato ex G H, & lateris C M fiant duo diametri Q P, & q p, eorumque erecta sint P R, & p r: dico ductas diametros æquales esse, & quadratum ex P Q æquale esse quadrato ex differentia ipsarum P Q, & P R.



ex 6. hu. *Quia vt M H ad G M, ita est diameter Q P ad eius erectum P R, ergo comparando antecedentes ad terminorum differentias, erit M H ad H G, vt P Q ad differentiam ipsarum P Q, & P R, & pariter eorundem quadrata proportionalia erunt, estque quadratum ex H M æquale semiquadrato ex G H, ergo quadratum ex P Q æquale erit semiquadrato ex differentia P Q, & P R, & sic quadratum ex p q æquale erit semiquadrato ex differentia ipsarum p q & p r; & sunt diametri P Q, & p q æquales, cum æquè recedant ab axi, & habeant latus commune C M.*

Secundo dico quod summa quadratorum ex Q P, & ex P R minor est qualibet alia summa quadratorum laterum figuræ alterius diametri.

Quia duplum rectanguli M H E minus est duplo quadrati M H, seu singulari quadrato ex G H, ergo duplum M H ad H G minorem proportionem habet, quàm G H ad H E, ergo duplum rectanguli ex G E, & M H in E H minus erit summa quadratorum ex G E, & ex E H & propterea summa quadratorum ex Q P, & ex P R minor erit summa quadratorum ex I L, & ex I K.

Lem. 10. huius. Lem. 12. huius.

Tertio, quia duplum rectanguli ex E H A minus est duplo quadrati M H, seu singulari quadrato ex G H, ergo duplum E H ad H G minorem proportionem habet, quàm G H ad H A, ergo duplum rectanguli ex G A, E H in A H minus erit summa quadratorum ex G A, & ex A H: quare summa quadratorum ex I L, & ex I K minor erit, quàm quadratorum summa ex A C, & ex A F.

Lem. 10. huius. Lem. 12. huius.

Quarto quia duplum rectanguli V H M maius est duplo quadrati ex M H, seu singulari quadrato ex G H, ergo duplum V H ad H G maiorem proportionem habet, quàm H G ad H M, & propterea duplum rectanguli ex G M, & V H in M H maius erit summa quadratorum ex G M, & ex M H, & ideo summa quadratorum ex T S, & S Z maior erit quadratorum summa ex Q P, & ex P R, & sic de reliquis: quare summa quadratorum ex Q P, & ex P R minima est omnium, vt fuit propositum.

Lem. 10. huius. Lem. 12. huius.

In

In hyperbola reperire diametrum, cuius figuræ duo quadrata laterum æqualia sint quadratis laterum figuræ axis: oportet autem vt quadratum axis C A minus sit semiquadrato ex differentia laterum figuræ eius C A, & A F. PROP. 5. Addit.

Quia ex hypothesi quadratum axis A C minus est semiquadrato ex differentia laterum figuræ A C, A F, vt in nota proposit. 46. dictum est, quadratum ex A H minus est semiquadrato ex G H: fiat duplum c *H ad H G, vt G H ad H A, & lateris C* c *ducatur diameter* b a, *cuius erectus* c a, *ergo duplum rectanguli ex summa G A,* c *H in A H æquale est summa quadratorum ex G A, & ex A H, & summæ quadratorum ex* a b, *& ex* a c *æqualis erit quadratorum summæ ex A C, & ex A F, quod erat ostendendum.* Lem. 10. huius. Lem. 12. huius.

In eadem hyperbola diametrum reperire, cuius figuræ duo quadrata laterum æqualia sint quadratis laterum figuræ datæ diametri I L: oportet autem vt I L cadat inter axim, & diametrum P Q, cuius quadratum subduplum sit quadrati ex differentia P Q, & ex P R. PROP.6. Addit

Sit C E latus diametri I L, & fiat duplum V H ad H G, vt G H ad H E, & ponatur S T diameter lateris C V, cuius erectus sit S Z: erit igitur duplū rectanguli ex G E, & V H in E H æquale quadratis ex G E, & ex E H, & propterea summa quadratorum ex T S, & ex S Z æqualis erit quadratorum summæ ex L I, & ex I K, quod erat propositum. Lem. 10. Lem. 12. huius.

Deducitur pariter ex 5. propositione additarum in eadem hyperbola tres diametros reperiri posse, quarum laterum summa quadratorum æquales sint inter se.

Et ex 6. propositione additarum deducitur, quod quatuor diametrorum eiusdem hyperbolæ laterum summa quadratorum æquales esse possunt inter se.

a Et educamus inter A P inclinatam I L: quia quadruplum quadrati M H æquale est quadrato H G, &c. *Suppleri debent ea, quæ deficiunt, alioqui constructio imperfecta esset: duci igitur debet C B parallela diametro I L, quæ occurrat sectioni ad punctum B, à quo ad axim perpendicularis ducatur B E secans axim in E.*

SECTIO NONA

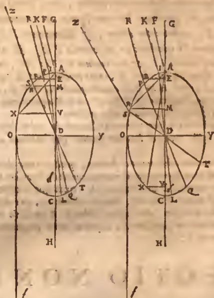
Continens Proposit. XXXXI. XXXXVII. & XXXXVIII.

a IN ellipsi duo latera figuræ maioris axis transuersi minora sunt duobus lateribus figuræ cuiuslibet alterius diametri, & duo latera figuræ diametri axi maiori proximioris minora sunt duobus lateribus figuræ diametri remotioris.

XXXXVII.

XXXXVII. Si verò duplum quadrati A C maius non fuerit quadrato ex fumma duorum laterum fuæ figuræ; vtique quadratum diametri fuæ figuræ minus erit quadrato diametri figuræ cuiuflibet alterius diametri eiufdem fectionis, & quadratum diametri figuræ proximioris axi minus erit quadrato diametri figuræ remotioris.

XXXXVIII. Si autem duplum quadrati axis tranfuerfi maius fuerit quadrato ex fumma duorum laterum fuæ figuræ, æquidem reperientur ad vtrafque eius partes duæ diametri æquales, & cu-



iuslibet earum quadratum bis fumptum æquale erit quadrato ex fumma duorum laterum fuæ figuræ; & quadratum diametri fuæ figuræ minus eft quadrato diametri figuræ alterius cuiufcunque diametri exiftentis in eodem quadrante eiufdem fectionis; & diameter figuræ proximioris minor eft diametro figuræ remotioris.

PROP.

PROPOSITIO XXXXI.

IN ellipsi A B C sit A C axis maior, & y O minor, & sint P Q, & S T duæ aliæ diametri, sitque A F erectus ipsius A C, & P R erectus ipsius P Q, & O f ipsius y O. Dico quod C F minor est, quàm Q R, & Q R, quàm T Z, & T Z, quàm y f.

Ducantur A N, A X ordinatim applicatæ ad diametros P Q, S T, & duæ ad axim perpendiculares N M, X V, & interceptæ A G, C H.
b Quia quadratum A C ad quadratum y O, nempe A C ad A F eandem proportionem habet, quàm C G ad G A, seu ad C H habebit quadratum C A ad quadratum C F summæ ipsius C A, eiusque erecti eandem proportionem, quàm quadratum C G, nempe C G in A H ad quadratum G H: & quadratum A C ad quadratum y O eandem proportionem habet, quàm G C in C H ad quadratum C H: estquè quadratum y O ad quadratum summæ y f, vt quadratum C H ad quadratum H G; ergo quadratum A C ad quadratum y f est, vt C G in C H minorem ad quadratum H G; sed quadratum A C ad quadratum C F eandem proportionem habet, quàm G C in maiorem A H ad quadratum G H; igitur A C ad C F maiorem proportionem habet, quàm ad y f: & propterea C F summa A C, & erecti illius minor est, quàm y f, quæ est summa y O, & erecti illius. Et quoniam C G in M H, quod minus est, quàm C G in A H ad quadratum H G eandem proportionem habet, quàm quadratum A C ad quadratum Q R summæ diametri, & erecti ipsius P Q (16. ex 7.) quare quadratum A C ad quadratnm C F maiorem proportionem babebit, quàm ad quadratum Q R, & propterea C F minor erit, quàm Q R. Et quoniam C G in V H ad quadratum H G est vt quadratum A C ad quadratum T Z ad quàm ordinatim applicatur A X (16. ex 7.) erit C F minor quàm T Z: cumque C G in H M ad quadratum H G maiorem proportionem habeat, quàm G C in V H ad quadratum idipsum H G habebit quadratum

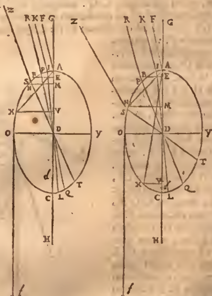
Defin. 1. huius.

tum

tum A C ad quadratum Q R maiorem proportionem quàm ad quadratũ T Z. Et pariter ostendetur, quod quadratum A C ad quadratum T Z maiorem proportionem habet, quàm ad quadratum γf; quapropter C F minor est quàm Q R, & Q R minor, quàm T Z, & T Z minor, quàm γf. Quod erat ostendendum.

PROPOSITIO XXXXVII.

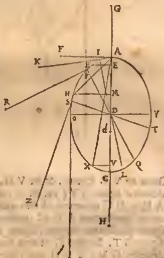
IN eadem figura si duplum quadrati A C maius non fuerit quadrato summæ C F. Dico, quod diameter figuræ eius minor est diametro figuræ Q P R, & diameter figuræ Q P R minor est diametro figuræ T S Z.



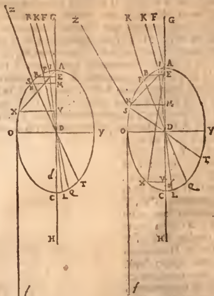
Quoniam duplum quadrati A C non excedit quadratum summæ C A F; ergo duplum quadrati C G, nempe G C in A H bis sumptum non excedit quadratum H G, & propterea C G in H M bis sumptum minus est quadrato H G: tollatur communiter duplum M G in H M remanebit

dupluin

duplum H M in C M minus duobus quadratis ex M H, & ex G M: & propterea A M in M C bis sumptum ad H M in M C bis sumptum, nempe A M ad M H habebit maiorem proportionem, quam duplum A M in M C ad duo quadrata ex H M, & ex G M: & componendo A H ad H M, seu quadratum A H ad A H in H M maiorem proportionem habebit quàm duplum A M in M C cum duobus quadratis ex H M, & ex M G (quæ omnia simul æqualia sunt duobus quadratis C G, & H C) ad duo quadrata M H, & M G; igitur quadratum A H ad A H in H M maiorem proportionem habet, quàm duo quadrata C G, & C H ad duo quadrata H M, & G M, & permutando quadratum A H ad duo quadrata C G, & H C, scilicet quadratum A C ad quadratum diametri figuræ eius maiorem proportionem habet, quàm A H in H M ad duo quadrata M G, & M H, seu quàm quadratum A C ad quadratum diametri figuræ P Q (19. ex 7.) quapropter diameter figuræ P Q maior est diametro figuræ A C. Ducatur postea diameter S T, & ad eam ordinatim applicata A X, & ad axim perpendicularem X V. Et siquidem G M minor est, quàm V H cum A G, & C H sint æquales, erunt duo quadrata H M, & M G maiora duobus quadratis H V, V G: hæc autem maiora sunt quàm duplum V H in V *d*: ergo duplũ M V in V *d* ad duplum H V in V *d*, nempe V M ad V H maiorem proportionem habet, quàm duplũ M V in V *d* ad duo quadrata ex V H, & ex V G: & componendo M H ad H V, seu M H in H A ad V H in H A maiorem proportionem habebit, quàm duplum M V in V *d* cum duobus quadratis ex V H, & ex V G, quæ omnia simul sunt vt duo quadrata M H, & M G ad duo quadrata V H, & V G: & permutando M H in H A ad duo quadrata H M, & G M, seu vt quadratum A C ad quadratum diametri figuræ P Q (19. ex 7.) maiorem proportionem habebit, quàm V H in H A ad duo quadrata V H, & V G, seu quàm quadratum A C ad quadratum diametri figuræ S T (19. ex 7.) quare diameter figuræ S T maior est diametro figuræ P Q. Postea quia *y* O est media proportionalis inter A C, & A F erit quadratum A C ad quadratum *y* O, vt A C ad A F, nempe vt C G ad C H, seu vt C G in C H ad quadratum C H, & quadratum *y* O ad summam quadratorum *y* O, & O *f*, nempe ad quadratum diametri suæ figuræ est vt quadratum H C ad quadratum C G cum quadrato H C: quare ex



æqualitate quadratum A C ad quadratum diametri figuræ y O eandem proportionem habet, quàm C G, seu A H in H C ad duo quadrata ipsius C G, atque ipsius C H: igitur A H in H V maiorem ad duo quadrata ex V G minori, & ex V H, seu vt quadratum A C ad quadratum diametri figuræ S T (19. ex 7.) maiorem proportionem habebit, quàm A H in H C minorem ad duo quadrata ex G C, & C H maiora, scilicet vt quadratum A C ad quadratum diametri figuræ y O (19. ex 7.); igitur quadratum diametri figuræ y O maior est quàm quadratum diametri figuræ S T. Si verò G M non fuerit minor quàm V H; vtique duo quadrata ex G M, & M H non erunt maiora duobus quadratis ex V G, & ex V H: at A H in M H ad duo quadrata ex G M, & ex M H, nempe quadratum A C ad quadratum diametri figuræ P Q habebit maiorem proportionem, quàm A H ad H V ad duo quadrata ex V H, & ex V G, scilicet vt quadratum A C ad quadratum diametri figuræ S T; igitur diameter figuræ S T maior est diametro figuræ P Q. Eadem prorsus ostendentur, quando punctum V cadit vltra punctum D ad partes A inter puncta D, & M. Et hoc erat propositum.



PROP.

PROPOSITIO XXXXVIII.

Sit iam duplum quadrati A C maius quadrato C A F, erit duplum quadrati A H maius quadrato G H : ponatur duplum quadrati H M æquale quadrato G H : & ducatur ad axim perpendicularis M N ; iungaturque A N, eiusque diameter P Q extendatur, erit H M ad M G, vt P Q ad P R (7. ex 7.) ergo, & quadratum H M ad quadratum H G erit, vt quadratum P Q ad quadratum P R, & quadratum H M ad duo quadrata ex H M, & ex M G eandem proportionē habebit, quàm quadratum P Q ad quadratum diametri suæ figuræ: educatur postea diameter I L inter A, & B, & erectum illius sit I K ad quam ordinatim ducta sit A B, & ad axim perpendicularis sit B E erit quadratum M H ; nec non G H in H D æquale dimidio quadrati H G ; igitur G H ad M

H erit vt M H ad H D : & comparando homologorum differentias erit M G ad M D, vt G H ad H M : & propterea duplum G H in M D, seu quadruplum H D in D M est æquale duplo G M in M H : & propterea duplum G M in M H maius erit quàm duplum G E in M H ; ponatur communiter duplum E M in H M cum quadruplo quadrati M D, & fiat D *d* æqualis D M, fiet duplum E *d* in M H maius quadrato H M cum

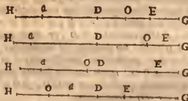
quadrato M G ; igitur *d* E in E M bis sumptum ad duplum E *d* in M H. nempe E M ad M H minorem proportionem habebit, quàm duplum *d* E in E M ad duo quadrata ex M G, & ex M H : & componendo E H ad M H, seu E H in H A ad M H in H A minorem proportionem habebit, quàm duplum *d* E in E M vna cum quadratis ex M H, & ex M G, quæ æqualia sunt duobus quadratis H E, & G E ad duo quadrata ex M G, & ex H M. Et sic pariter ostendetur, quod quadratum H A ad H E in H A minorem proportionem habebit, quàm duo quadrata ex H A, & ex A G ad duo quadrata ex H E, & ex E G. Atque demonstrabitur quemadmodum antea dictum est, quod quadratum diametri figu-

tri figuræ P Q minus est quadrato diametri figuræ I L, & quadratum diametri figuræ I L minus est quadrato diametri figuræ A C. Ponatur postea diametri S T, & y O vltra diametrum P Q, sitque A X ordinatim applicata ad diametrum S T, & V X ad axim perpendicularis sit, ostendetur (quemadmodum in præcedentibus dictum est) quod diameter figuræ P Q minor sit diametro figuræ S T, & diameter figuræ S T minor sit diametro figuræ y O, vbicunque secet ad axim perpendicularis X V ipsam A C. Et hoc erat ostendendum.

In Sectionem IX. Proposit. XXXXI. XXXXVII. & XXXXVIII.

LEMMA. XIII.

SI recta linea G H secetur bifariam in D, & non bifariam in O, E, atque fiat G a æqualis H E; si quidem proportio dupli O H ad H G eadem fuerit proportioni G H ad H E, erit duplum rectanguli ex differentia ipsarum E H, G O in H O æquale quadratis ex G O, & ex O H: si verò proportio illa maior fuerit erit rectangulum maius quadratis; & si eadem proportio fuerit minor, idipsum rectangulum quadratis minus erit.



Et primo quia duplum O H ad H G est vt G H ad H E, ergo duplum rectanguli O H E æquale erit quadrato ex G H; auferatur cõmuniter duplum rectanguli H O G, quia H O est communis rectangulorum altitudo, remanet duplũ rectanguli ex differentia ipsarum E H, G O, seu ex differentia ipsarum G a, & G O in H O, seu remanet duplum rectanguli a O H æquale quadrato H G minus duplo rectanguli G O H: huic verò differentiæ æqualia sunt duo quadrata ex G O, & ex H O, ergo duplum rectanguli a O H æquale est summæ quadratorum ex G O, & ex O H.

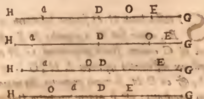
Secundo, quia duplum O H ad H G maiorem proportionem habet, quàm G H ad H E, ergo duplum rectanguli O H E maius erit quadrato G H, & ablato communiter duplo rectanguli G O H erit duplum rectanguli ex differentia ipsarum E H, & G O in H O maius, quàm summa quadratorum ex G O, & ex H O.

Tertio

Tertio si duplum O H ad H G minorem proportionem habuerit, quàm G H ad H E, eodem progressu ostendetur, quod duplum rectanguli ex differentia ipsarum E H, & G O in H O minus est quadratis ex G O, & ex H O, quod erat propositum.

L E M M A XIV.

Iisdem positis sit G E minimum segmentorum, dico quod duo quadrata ex E H, & ex G E, scilicet ex maximo, & minimo segmentorum æqualia sunt duobus quadratis ex O H, & ex G O intermedijs segmentis vna cum duplo rectanguli sub differentijs minimæ G E à duabus intermedijs G O, & H O.

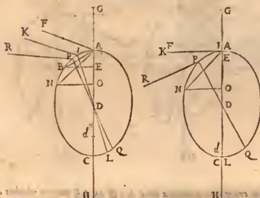


Fiat H a æqualis G E, ergo O a erit differentia ipsarum E H, & G E, sicuti O E est differentia ipsarum G O, & G E. Et quia duo quadrata ex maximo, & ex minimo segmentorum, scilicet ex H E, & ex E G æqualia sunt duplo quadrati ex G D semisse totius, cũ duplo quadrati ex E D intermedia sectione; estque duplum quadrati ex E D semisse ipsius E a æquale duplo rectanguli E O a ex inæqualibus segmentis vna cum duplo quadrati ex intermedia sectione O D, ergo duo quadrata ex G E, & ex E H æqualia sunt his omnibus spatijs, scilicet duplo quadrati ex G D, & duplo quadrati ex D O cum duplo rectanguli E O a, sed duo quadrata ex inæqualibus segmentis G O, & ex O H æqualia sunt duplo quadrati ex semisse totius G D cum duplo quadrati ex intermedia sectione O D, igitur excessus summa quadratorum ex G E, & ex E H, supra summam quadratorum ex G O, & O H æqualis est duplo rectanguli ex E O a, quod erat ostendendum.

L E M M A XV.

IN ellypsi, cuius axis A C, erectus A F, diameter I L, eiusq; erectus I K, & latus C E, & similiter altera diameter Q P, cuius erectus P R, & latus C O: dico quod duplum rectanguli ex differentia ipsarum E H, G O, in H O a duobus quadratis ex G O, & ex O H, atque

H, atque aggregatum quadratorum laterum I L, & I K figuræ diametri I L ab aggregato quadratorum laterum P Q, & P R figuræ alterius diametri, vna deficiunt, aut vna æqualia sunt, vel vna excedunt.

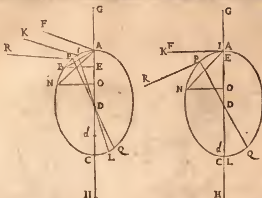


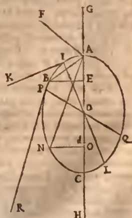
Fiat O d differentia ipsarum E H, & G O, & primo quia duplum rectanguli ex d O H æquale est quadratis ex G O, & ex H O, ergo duplum rectanguli d O E ad duplum rectanguli d O H, seu O E ad H O eandem proportionem habet, quàm duplum rectanguli d O E ad duo quadrata ex G O, & ex H
O, & componendo, erit E H ad H O, seu rectangulum E H A ad rectangu- Lem. 14.
lum O H A vt duo quadrata ex G E, & ex E H ad duo quadrata ex G O, & huius.
ex H O, & permutando rectangulum E H A ad quadrata ex G E, & ex E
H, seu quadratum ex A C ad quadrata ex I L, & ex I K, vel ad quadrata 17. huius.
ex A C, & ex A F eandem proportionem habebit, quàm rectangulum O H A Ibidem.
ad quadrata ex G O, & ex H O, vel quadratum A C ad duo quadrata ex P Q, & ex P R, quapropter duo quadrata ex I L, & ex I K, seu ex A C, & A F æqualia erunt duobus quadratis ex P Q, & ex P R.

Secundo sit duplum rectanguli d O H minus quadratis ex G O, & ex H O. duplum rectanguli d O E ad duplum rectanguli d O H, seu O E ad H O habebit maiorem proportionem, quàm duplum rectanguli d O E ad duo quadrata ex G O, & ex H O, & rursus componendo ex lem. 2. lib. 5. & ex lem. 14. & permutando, atque ex 17. proposit. huius habebit idem quadratum A C ad duo quadrata ex I L, & ex I K maiorem proportionem, quàm ad duo quadrata ex P Q, & ex P R: quapropter duo quadrata ex I L, & ex I K minora erunt duobus quadratis ex P Q, & ex P R.

Tertio sit rectangulum d O H maius duobus quadratis ex G O, & ex H O. duplum rectanguli ex d O E ad duplum rectanguli d O H, seu O E ad H O habebit

bebit minorem proportionem, quàm duplum rectanguli d O E ad duo quadrata ex G O, & ex O H, & componendo ex lem. 14. permutando, & ex 17. huius, tandem erunt duo quadrata ex I L, & ex I K maiora duobus quadratis ex P Q, & ex P R.





SI in ellypsi termini E, O laterum C E, C O, diametrorum I L, & P Q cadant hinc inde à centro D, sitque D O maior quàm D E, dico quod quadrata ex P Q, & ex P R maiora sunt quadratis ex I L, & ex I K.

Quia O H minor est, quàm E H, sed duo quadrata ex G O maximo, & O H minimo segmentorum eiusdem recta linea G H maiora sunt duobus quadratis ex G E, & ex E H intermedijs segmentis; ergo O H ad E H, minor ad maiorem seu rectangulum O H A ad rectangulum E H A minorem proportionem habet, quàm maior summa quadratorum ex G O, & ex O H ad minorem summam quadratorum ex G E, & ex E H, & permutando rectangulum O H A ad duo quadrata ex G O, & ex O H, seu quadratum

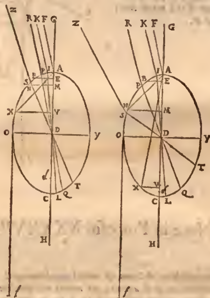
17. huius *A C ad duo quadrata ex P Q, & ex P R*

minorem

minorem proportionem habebit, quàm rectangulum E H A ad duo quadrata ex G B, & ex E H, seu quàm quadratum A C ad duo quadrata ex I L, & ex I K: igitur duo quadrata ex P Q, & ex P R maiora sunt duobus quadratis ex I L, & ex I K, quod erat ostendendum. 17. huius.

Notæ in Proposit. XXXXI.

IN *ellypsi, cuius axis maior A C, quia rectangulum A H E ad quadratum H G est, vt quadratum A C ad quadratum ex L I K, vel ad quadratum ex C A F, atq; quadratum ex G H ad rectangulum A H M eandem proportio-* Prop. 16. huius.



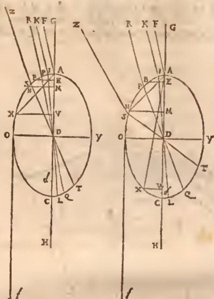
nem habet, quàm quadratum ex Q P R ad quadratum A C, igitur ex æquali perturbata rectangulum A H E maius ad minus rectangulum A H M eandem proportionem habet, quàm quadratum ex Q P R ad quadratum ex L I K, vel ad quadratum ex C A F: estque rectangulum A H E maius rectangulo A H M, ergo quadratũ ex summa Q P R maius est quadrato ex summa L I K, & propterea linearũ sũma Q P R maior erit, quàm sũma L I K, vel quàm sum-

 ma

ma C A F. Tandem quia rectangulum A H M ad quadratum ex summa H
ex 16. huius. *M G eandem proportionem habet, quàm quadratum A C ad quadratum ex Q*
Ibidem. *P R, sed quadratum ex H C G ad rectangulum ex A H C eandem proportionẽ habet, quàm quadratum ex sũma T O ſ ad quadratum A C, (eo quod H C est intercepta comparata diametri T O, cum T O secet bifariam ad eam ordinatim applicatam A C, atque ab eodem puncto C perpendicularis ad axim ducta cadat super idem punctum C), igitur ex æquali perturbata rectangulum A H M maius ad minus rectangulum ex A H C eandem proportionem habet, quàm quadratum ex summa T O ſ ad quadratum ex summa Q P R, & propterea summa laterum T O ſ maior erit, quàm summa Q P R.*

Notæ in Proposit. XXXXVII.

QVia duplum quadrati A C non est maius quadrato ex C A F; ergo duplum quadrati ex A H æquale, aut minus erit quadrato ex summa G H, estque duplum rectanguli ex E H A, vel ex E H M minus duplo quadrati A H, igitur minus quoque erit quadrato ex G H, igitur duplum M H ad G H minorem proportionem habet, quàm G H ad E H, ergo
Lem. 13. huius. *duplum rectanguli ex differentia ipsarum E H G M in M H minus est duobus*
Lem. 15. huius. *quadratis ex G M, & ex H M: quare duo quadrata ex I L, & ex I K minora erunt duobus quadratis ex Q P, & ex P R, & sic duo quadrata ex Q P, & ex P R minora sunt duobus quadratis ex T S, & ex S Z.*



Notæ in Proposit. XXXXVIII.

QVia ex hypotheſi duplum quadrati A C maius eſt quadrato ex C A F, ergo duplum quadrati ex A H maius erit quadrato ex H G. Fiat igitur quadratum ex M H æquale ſemiquadrato G H, & lateris C M ſiant duæ diametri Q P, & q p, quarum erecta ſint P R, & p r: Dico duplum quadrati Q P æquale eſſe quadrato ex ſumma laterum Q P R: Quia Q P ad P R eſt vt H M ad M G, & antecedentes ad terminorum ſummas, & eorum quadrata proportionalia erunt, ſcilicet quadratum Q P ad quadratum ex Q P R eandem proportionem habebit, quàm quadratum ex M H ad quadratum ex H G: erat autem quadratum M H ſubduplum quadrati ex H G, igitur quadratum ex P Q ſubduplum eſt quadrati ex Q P R. Eadem ratione quadratum ex q p ſubduplum erit quadrati ex q p r, & diametri Q P, & q p æquales erunt, cum æque recedant ab axi, & habeant commune latus C M. Prop. 7. huius.

Poſtea quia punctum E cadit inter M, & A, erit duplum rectanguli M H E maius duplo quadrati ex M H, ſeu maius quadrato G H, & propterea duplum M H ad H G maiorem proportionem habebit, quàm G H ad H E, ergo

Lem. 13. *duplum rectanguli ex differentia ipsarum E H, & G M in M H maius erit*
Lem. 15. *duobus quadratis ex G M, & ex M H, & propterea duo quadrata ex I L, &*
huius. *ex I K simul sumpta maiora erunt duobus quadratis ex Q P, & ex P R.*

Similiter duplum rectanguli E H A maius erit quadrato ex G H, & propterea duplum E H ad H G maiorem proportionem habebit, quàm G H ad H A, & ideo duplum rectanguli ex differentia ipsarum A H, & G E in E H maius erit duobus quadratis ex G E, & ex E H: igitur duo quadrata ex C A, & A F maiora erunt duobus quadratis ex I L, & ex I K.

Lem. 13. huius. Lem. 15. huius.

Rursus quia V H minor est, quàm M H erit duplum rectanguli V H M minus duplo quadrati M H, seu minus quadrato G H, igitur duplum V H ad H G minorem proportionem habet, quàm G H ad H M, & propterea duplum rectanguli ex differentia ipsarum M H, & G V in V H minus erit duobus quadratis ex G V, & ex V H, & propterea duo quadrata ex Q P, & ex P R minora erunt duobus quadratis ex T S, & ex S Z: si verò D V maior fuerit quàm D M, erunt duo quadrata ex Q P, & ex P R minora duobus quadratis

Lem. 13. huius. Lem. 15 huius. Lem. 16 huius.

dratis ex T S, & S Z : igitur summa duorum quadratorum ex Q P, & ex P R minor est summa quadratorum duorum laterum figura cuiusibet alterius diametri eiusdem ellipsis.

In ellipsi reperire diametrum, cuius duo quadrata laterum figuræ eius æqualia sint quadratis laterum figuræ axis maioris : oportet autem vt quadratum axis maioris A C maius sit semiquadrato ex summa laterum C A F figuræ eius. PROP. 7. Addit

Quia ex hypothesi quadratum axis maioris A C maius est semiquadrato ex summa C A F, ergo, vt in nota prop. 48. dictum est, duplum quadrati ex A H maius est quadrato ex H G; fiat duplum rectanguli c H A æquale quadrato ex G H, & lateris C c fiat diameter a b *cuius erectus* a c. *Dico hanc esse diametrum quæsitam.*

Quoniam duplum rectanguli c H A æquale est quadrato ex G H, ergo duplum c H ad H G est vt G H ad H A, eritq; duplum rectanguli ex differentia ipsarum A H, & G c in c H æquale quadratis ex G c, & ex c H, & summa quadratorum ex b a, *& ex* a c *æqualis erit quadratorum summa ex A C, & ex A F, quod erat ostendendum.* Lem 13. Lem. 15.

In eadem ellypsi diametrum reperire, cuius duo quadrata laterum figuræ eius æqualia sint quadratis laterum figuræ datæ diametri I L : oportet autem vt I L cadat inter axim, & diametrum P Q, cuius quadratum subduplum sit quadrati ex summa laterum Q P R. PROP. 8. Addit.

Sit C E latus diametri I L, & fiat duplum V H ad H G, vt G H ad H E, & ponatur S T diameter lateris C V, cuius erectus sit S Z : erit igitur duplum rectanguli ex differentia ipsarum E H, & G V in V H æquale quadratis ex G V, & ex V H, ideoque summa quadratorum ex L I, & ex I K æqualis erit quadratorum summa ex T S, & S Z, quod propositum fuerat. Lem. 13. huius. Lem. 15. huius.

Colligitur similiter ex 7. proposit. additarum, quod in vna ellypsi tres diametri reperiri possunt, quarum summa quadratorum laterum æquales sint inter se : & ex 8. proposit. additarum deducitur, quod quatuor diametrorum eiusdem ellypsis laterum summa quadratorum æquales possunt esse inter se, sed oportet vt quadratum axis maioris datæ ellypsis maius sit, quàm dimidium quadrati ex summa laterum figuræ axis C A F.

a Duo latera figuræ axis transuersi minora sunt duobus lateribus figuræ cæterarum diametrorum, & duo latera figuræ diametri axi proximioris minora sunt duobus lateribus figuræ remotioris, &c. *Addidi ea, quæ deficere videbantur in hoc textu.*

b Iisdem figuris manentibus cum suis signis ostendatur quod duplum quadrati A C, si non excesserit F, quod diameter est illius figuræ minor, quàm diameter figuræ I L, & diameter figuræ I L, quàm diameter figuræ P Q, &c. *Legendum puto vt in textu apparet.*

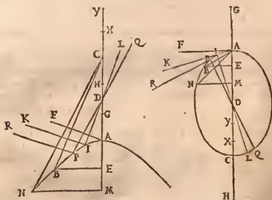
c Et sic ostendetur quod si punctum V inciderit super D A, & ostendetur D, & M, &c. *Legendum puto, vt in textu videre est.*

SECTIO DECIMA

Continens Proposit. XXXXIX. XXXXX. & XXXXXI.

XXXXXI. IN hyperbola, & ellipsi, si axis transuersus minor fuerit suo erecto, differentia quadratorum duorum laterum figuræ axis eius maior est, quàm differentia quadratorum laterum figuræ cuiuslibet alterius diametri ei homologæ. Et differentia quadratorum laterum figure homologæ proximioris axi semper maior est in hyperbola, quàm differentia quadratorum laterum figuræ remotioris: at in ellypsi quousque diameter transuersa æqualis non fiat suo erecto. a

XXXXX. Et in hyperbola differentia quadrati axis inclinati ab eius figura minor erit semidifferentia quadratorum duorum laterum figuræ sui homologi.

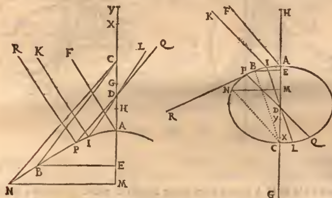


XXXXIX. Si verò in hyperbole axis inclinatus maior fuerit suo erecto, vtique differentia quadratorum duorum laterum figuræ axis minor erit differentia quadratorum laterum figuræ al-

terius

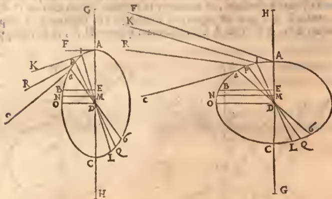
terius homologæ diametri, atque differentia quadrati axis ab eius figura maior erit semidifferentia quadratorum duorum laterum figuræ suæ homologæ, & minor erit integra differentia eorundem quadratorum.

In sectione A B N sit axis A C maior in figura prima, & in secunda minor, sintquè I L, P Q duæ aliæ diametri, quæ in ellipsi cadant inter
b axim, & vnà æqualium; ducanturque duæ ordinationes A B, A N ad diametros I L, P Q, & duas ad axim perpendiculares B E, N M; sitque A F erectus ipsius A C, & A G, C H duæ interceptæ: ponaturque
c in ellipsi X D æqualis E D, habebit E H ad H A minorem proportionem in prima hyperbola, & maiorem in reliquis, quàm E D ad D A, seu quàm E X, quæ est summa in hyperbola, & differentia in ellipsi ipsarum E G, & E H ad A C differentiam ipsarum H A, A G; & qua-



dratum A C in omnibus figuris ad differentiam quadratorum A C, & A F eandem proportionem habet, quàm quadratum A H ad differentiam duorum quadratorum A H, & G A: atque E H ad H A minorem proportionem habet in duabus primis figuris, & maiorem proportionem in duabus secundis, quàm E G ad G A, comparando homologorum summas, erit E H ad H A, vt E H cum E G ad H A cum G A, nempe aggregatum E H, E G in earundem differentiam ad aggregatum H A, A G in earundem differentiam, quod est æquale differentiæ duorum quadratorum E H, E G; nempe quadratum A C ad differentiam quadratorum duorum laterum figuræ I L minorem proportionem habet (in prima ellipsi), & maiorem (in secunda) quàm quadratum A H ad aggregatum H A, A G in earundem differentiam, quod est æquale differentiæ quadratorum H A, A G, nempe quadratum A C ad differentiam quadratorum

dratorum duorum laterum figuræ eius ; igitur quadratum A C ad differentiam quadratorum duorum laterum figuræ I L minorem proportionem habet, in prima ellipsi, & maiorem in reliquis, quam ad differentiam quadratorum dúorum laterum figuræ A C; ergo differentia quadratorum duorum laterum figuræ A C minor est in prima ellipsi, & maior in cæteris, quàm differentia quadratorum duorum laterum figuræ I L. Præterea M H ad H E minorem proportionem, aut maiorem habet, quàm M G ad G E: & ponamus in ellipsi Y D æqualem D M, ostendeturquè



quod M H in H A minus sit in prima ellipsi, & maior in cæteris, quàm duarum M G, M H summa in earum differentiam M Y: & ostendetur quemadmodum dictum est, quod differentia quadratorum duorum laterum figuræ I L maior est, quàm differentia quadratorum duorum laterum figuræ P Q.

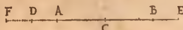
Deinde in hyperbola ponamus I K erectum ipsius I L, erit differentia quadratorum duarum I L, I K (quæ est æqualis K L in summam L I, I K) maior illa, quàm I L in L K, quod est æquale differentiæ quadrari I L, & eius figuræ, nempe differentiæ quadrati A C, & eius figuræ (29. ex 7.) & non est maior in prima, quàm duplum, & in secunda maior duplo, & hoc est propositum.

In Se-

In Sectionem X. Proposit. XXXXIX. XXXXX. & XXXXXI.

LEMMA XVI.

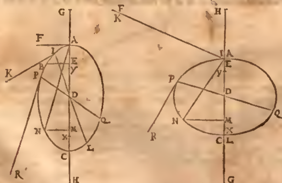
SI rectæ lineæ A B bifariam sectæ in C vtrinque addantur æquales portiones A D, & B E, dico rectangulum sub tota D E, & sub intermedia A B æquale esse differentiæ quadratorum ex A E, & ex A D.



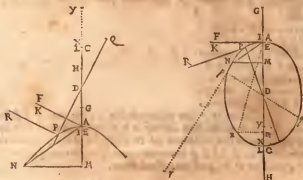
Apponatur F D æqualis D A, vel B E: & quia F D æqualis est B E addita communi B D, erit F B æqualis D E, & ideo rectangulum F B A æquale erit rectangulo sub D E, & sub A B, sed quadratum B D æquale est quadrato D A cum rectangulo F B A, (eo quod F A secta est bifariam in D, & ei in directum additur A B), ergo quadratum D B æquale est quadrato D A vna cum rectangulo sub D E, & sub A B, & propterea rectangulum sub D E, & sub A B contentum æquale est differentiæ quadrati B D, seu A E à quadrato D A, quod erat ostendendum.

LEMMA XVII.

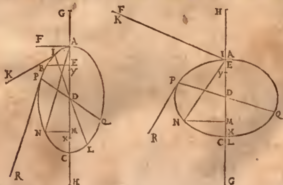
IN hyperbola, & ellypsi, cuius centrum D, axis A C, erectus A F, præfectæ A H, G C, & in ea diameter I L, cuius erectus



I K, & latus C E, pariterque diameter Q P, cuius erectus P R, eiusque latus C M, si fuerit proportio ipsius H M ad M D eadem proportioni H E ad D E, vel eadem proportioni H A ad D A, erit differentia quadratorum ex lateribus Q P, & ex P R figuræ diametri Q P æqualis differentiæ quadratorum ex lateribus figuræ diametri I L, vel A C: si verò proportio illa minor fuerit erit prior differentia quadratorum maior reliqua, & si illa proportio maior fuerit, erit prima quadratorum differentia minor reliqua.

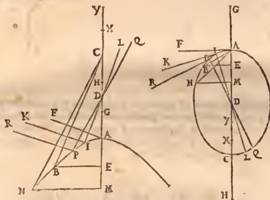


Fiat D X aqualis D E, & D Y aqualis D M, & primo quia H M ad M D est vt H E ad D E, permutando M H ad H E erit vt D M ad D E, seu vt duplū M Y ad duplum E X, & sumptis altitudinibus H A, & G H erit rectangulum M H A ad rectangulum E H A vt rectangulum sub Y M, & G H ad rectan-



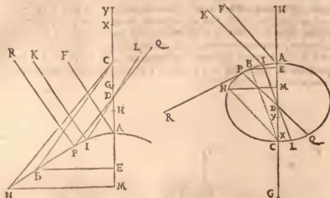
gulum

gulum sub E X, & G H, & permutando rectangulum M H A ad rectangulum sub Y M, & G H, seu ad differentiam quadratorum ex H M, & ex M G eandem proportionem habebit, quàm rectangulum E H A ad rectangulum sub E X, & sub G H, seu ad differentiam quadratorum ex H E, & ex E G: est verò quadratum A C ad differentiam quadratorum ex P Q, & ex P R, vt rectangulum M H A ad differentiam quadratorum ex H M, & ex M G, pariterque idem quadratum A C ad differentiã quadratorum ex I L, & ex I K est, vt rectangulum E H A ad differentiam quadratorum ex H E, & ex E G, igitur idem quadratum A C ad differentiam quadratorum ex P Q, & ex P R eandem proportionem habet, quàm ad differentiam quadratorum ex I L, & ex I K, & propterea differentia quadratorum ex Q P, & ex P R aequalis est quadratorum differentia ex I L, & ex I K, siue aequalis est quadratorum differentia ex A C, & ex A F. Lem. 16. huius. Ibidem. Prop. 20. huius. Ibidem.



Secundo H M ad M D minorem proportionem habeat, quàm H E ad D E, vt prius permutando habebit H M ad H E minorem proportionem, quàm D M ad D E, seu quàm duplum M Y ad duplum E X, & sumptis communibus altitudinibus H A ad G H, & permutando ex lem. 16. & proposit. 20. huius, idem quadratum A C ad differentiam quadratorum ex P Q, & ex P R minorem proportionem habebit, quàm ad differentiam quadratorum ex I L, & ex I K, quapropter differentia quadratorum ex P Q, & ex P R maior erit, quàm differentia quadratorum ex I L, & ex I K, seu maior, quàm differentia quadratorum ex A C, & ex A F.

Tertio habeat H M ad M D maiorem proportionem quàm H E ad D E: ut prius permutando, sumptis communibus altitudinibus H A, & G H, & denuo permutando ex lem. 16. & prop. 20. huius, sequitur quod idem quadratum



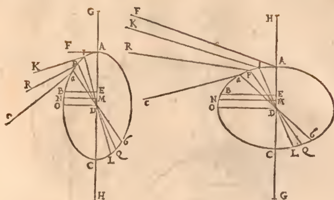
ex A C ad differentiam quadratorum ex P Q, & ex P R maiorem proportionem habet, quàm ad differentiam quadratorum ex I L, & ex I K, quare differentia quadratorum ex P Q, & ex P R minor erit, quàm differentia quadratorum ex I L, & ex I K, siue minor, quàm differentia quadratorum ex A C, & ex A F, quæ erant ostendenda.

LEMMA XVIII.

IN ellipsi si diameter a b bifariam secuerit rectam lineam A O terminos axium coniungentem, erit a b æqualis suo erecto a c.

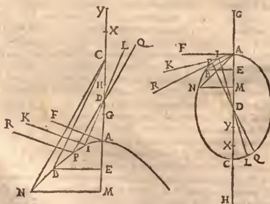
Quia axis A C bifariam diuiditur in centro D ab axi O D perpendiculari ad axim A C, quæ educitur à termino O ipsius A O ordinatim applicatæ ad Prop. 7. huius. *diametrum a b, habebit diameter a b ad eius erectũ a c eandem proportionem æqualitatis quàm habet H D ad D G, igitur diameter a b æqualis est eius lateri recto a c, quod erat propositum.*

Notæ

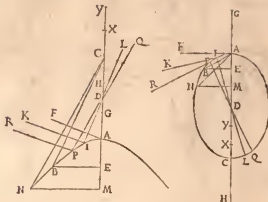


Notæ in Proposit. XXXXIX.

QVia in hyperbola axis A C maior ponitur erecto eius A F, estque A H ad H C vt A C ad A F, ergo præfecta A H maior portio est totius C A, & ideo punctum H cadit inter C, & D, & punctum E cadit inter M, & D, igitur eadem H D ad maiorem D M habebit minorem proportio-



enm



nem, quàm ad minorem D E, & componendo H M ad M D minorem proportionem habebit, quàm H E ad E D, & ideo differentia quadratorum ex P Q,
Lem. 17. huius. & ex P R maior erit, quàm differentia quadratorum ex I L, & ex I K, ſeu maior quàm differentia quadratorum ex A C, & ex A F.

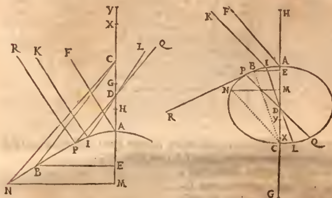
Rurſus quia rectangulum C A F maius eſt quadrato A F, (propterea quod rectangulum illud medium proportionale eſt inter maius quadratum ex A C, & quadratum minus ex A F), ergo differentia quadrati A C à rectangulo C A F, ſcilicet differentia ſpatiorum maximi, & intermedij, minor erit, quàm differentia inter quadratum maximum A C, & minimum A F, ſed differentia quadratorum ex A C, & ex A F minor oſtenſa eſt, quàm differentia quadratorum ex I L, & ex I K, ergo multo magis differentia quadrati A C à rectangulo C A F minor erit, quàm differentia quadratorum ex I L, & ex I K.

Tandem quia quadratum A C ad ſemidifferentiam quadratorum ex I L, &
Prop. 20. huius. ex I K eandem proportionem habet, quàm rectangulum E H A ad ſemidifferentiam quadratorum ex E H, & ex E G, vel ad ſemiſſem rectanguli ex E X in
Lem. 16. huius. G H, vel potius ad rectangulum ſub E D, & ſub G H; ſed quadrati A C à rectangulo C A F differentia ad quadratum ipſum A C, ſeu differentia A C, & A F ad A C eandem proportionem habet, quàm H G ad H A, ſeu quàm
ex Def. 2. huius. rectangulum E H G ad rectangulum E H A, igitur ex æquali differentia quadrati A C à rectangulo C A F ad ſemidifferentiam quadratorum ex I L, & ex I K eandem proportionem habebit, quàm rectangulũ E H G ad rectangulum ſub E D, & G H, eſtq; primũ rectangulũ reliquo rectangulo æquè alto maius, cum eius baſis E H maior ſit, quàm E D, igitur differentia quadrati A C à rectangulo C A F maior erit, quàm ſemidifferentia quadratorum ex I L, & ex I K.

Notæ

Notæ in Proposit. XXXXX.

SI hyperbole axis A C minor fuerit eius erecto A F, quia H M maior est, quàm H E, & punctum H cadit inter D, & A, ergo H M ad H D ma-



iorem proportionem habebit, quàm H E ad eandem H D, & comparando antecedentes ad terminorum summas H M ad M D maiorem proportionem habebit, quàm H E ad E D, quare differentia quadratorum ex P Q, & ex P R minor erit, quàm differentia quadratorum ex I L, & ex I K, seu minor quàm differentia quadratorum ex A C, & ex A F. Lem. 17. huius.

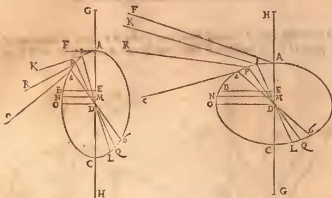
Postea, quia vt in precedenti nota dictũ est, differentia quadrati A C à rectangulo C A F ad semidifferentiã quadratorũ ex I L, & ex I K eandem proportionẽ habet, quàm rectangulum E H G ad rectangulum sub E D, & sub G H, estque illud rectangulum minus rectangulo isto aquè alto, (cum illius basis E H minor sit, quàm E D), igitur differentia quadrati A C à rectangulo C A F minor est, quàm semidifferentia quadratorum ex I L, & ex I K.

Notæ in Proposit. XXXXXI.

IN qualibet ellypsi sit diameter a b *aqualis eius erecto* a c, *eius latus erit C D, & diametri I L, & P Q cadant inter A C, & a b, earum laterum* ex Lem. 18. huius.

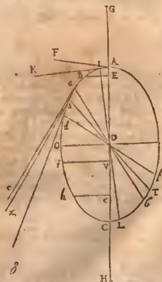
C E, &

C E, & C M, termini E, & M cadent inter D, & A, & M cadat inter E & D, propterea M H ad M D maiorem proportionem habebit, quàm H E



Lem. 17. huius. *ad E D, igitur differentia quadratorum laterum figuræ P Q minor erit differentia quadratorum laterum figuræ I L, vel figuræ A C.*

PROP. 9. Addit. *In ellypsi reperire diametrum, cuius differentia quadratorum laterum figuræ eius æqualis sit differentiæ quadratorum laterum figuræ axis maioris A C.*



Secetur H D in e, *vt H* e *ad* e *D eandem proportionem habeat, quàm H A ad A D, & ex puncto* e *educatur ad axim perpendicularis* e h *occurrens sectioni in* h, *& coniungatur* a h, *quàm bifariam secet diameter* f d, *cuius erectus* d g: *dico diametrum* f d *esse quæsitam. Quia H* e *ad* e *D eandem proportionem habet, quàm H A ad A D, ergo differentia quadratorum ex* f d, *& ex* d g *æqualis est differentiæ quadratorum ex A C, & ex A F, quod erat propositum.* Lem. 17. huius.

PROP. 10. Addit. *In ellypsi reperire diametrum, cuius differentia quadratorum laterum eius figuræ æqualis sit differentiæ quadratorum laterum figuræ*

datæ

datæ diametri I L: oportet autem vt data diameter cadat inter axim maiorem A C; & diametrum a b *æqualem suo erecto* a c.

Sit C E latus diametri I L, & diuidatur H D in V, vt habeat H V ad V D eandem proportionem, quàm H E habet ad E D, & ducta vt prius ad axim perpendiculari V X occurrens sectioni in X, & coniuncta A X, quam bifariam secet diameter T S, cuius erectus S Z; dico hanc esse quæsitam. Quoniam H V ad V D eandem proportionem habet, quàm H E ad E D, igitur differentia quadratorum ex T S, & ex S Z æqualis est differentia quadratorum ex I L, & ex I K, quod propositum fuerat. Lem. 17. huius.

Deducitur ex 9. propositione additarum, atque ex proposit. 51. huius, quod in ellypsi excessus quadrati cuiuslibet diametri transuersæ supra quadratum erecti eius successiue decrescit ab axi maiori A C vsque ad diametrum a b *æqualem suo erecto, atque ab hac diametro defectus quadrati cuiuslibet transuersæ diametri à quadrato erecti eius successiue augetur, quousque perueniatur ad diametrum* f d, *cuius differentia quadratorum figuræ eius æqualis sit differentia quadratorum figuræ axis maioris A C, & vltra diametrum* f d *differentia prædictæ semper magis augentur quousque perueniatur ad axim minorem Y O cuius differentia quadratorum figuræ eius maxima est omnium differentiarum inter quadrata laterum figuræ cuiuslibet diametri eiusdem ellypsis.* ex Prop. 50. huius.

Constat quoque ex 9. propositione additarum, quod in ellypsi tres diametri reperiri possunt, quarum differentia quadratorum figurarum laterum earum æquales sint inter se.

Et ex 10. additarum reperiri possunt quatuor diametri, quarum differentiæ quadratorum laterum figurarum earum æquales sint inter se: in hyperbole verò hoc non contingit, nam ab axi differentia quadratorum laterum figuræ cuiuslibet diametri successiue augentur, si axis maior fuerit suo erecto, at si minor fuerit prædicta differentia quadratorum successiue diminuuntur. ex Prop. 49. huius. ex Prop. 50. huius.

a Differentia (8. 15.) duorum quadratorum duorum laterum figuræ axis maior est in hyperbola (51.), & ellypsi, quàm differentia quadratorum duorum laterum figuræ homologæ diametri sectionis, & differentia homologi proximioris axi maior est differentia homologi remotioris: hoc autem si axis in hyperbola minor fuerit suo erecto (49.); si verò fuerit maior oppositum pronunciandum est (50.), & differentia quadrati axis inclinati, & figuræ eius minor est semidifferentia quadratorum duorum laterũ figuræ sui homologi, si axis inclinatus minor est suo erecto (49.) si verò fuerit maior excessus axis maior erit dimidio excessus quadratorum duorum laterum figuræ homologi, & minor quàm tota, &c. *Legendum puto: in qualibet ellypsi, &c. vt in textu apparet.*

b Et sit P Q in ellypsi vna . . . ., & educamus A B, A N, &c. *Repleui lacunam, vt in textu videre est.*

c Ergo E H ad H A minor est quàm E D ad D A, nempe E X excessus E G, E H ad A C excessum H A, A G, & quadratum A C in omnibus figuris ad differentiam duorum quadratorum A G, A F, vt quadratum A H ad differentiam duorum quadratorũ A G, & E H ad H A minor in duabus primis, & maior in duabus secundis, quàm E G ad G A, & iungamus ergo E H ad H A, nempe E H ad H A, quàm aggregatum

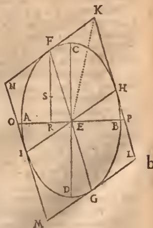
tum E H, E G in ſuum exceſſum ad aggregatum H A, E G in ſuum exceſſum æqualis exceſſui duorum quadratorum E H, E G, nempe quadratum A C ad exceſſum quadratorum duorum laterum figuræ I L minor in prima ellypſi, & maior in ſecunda, quàm quadratum A H ad aggregatum H A, A G in eorum exceſſu æqualis, &c. *Hæc omnia corrigi debuiſſe nemo negabit, atque hinc manifeſtum eſt non pauca in textu arabico deſiderari, cum propoſitio 51. vera non ſit abſque determinationibus ſuperius expoſitis.*

SECTIO VNDECIMA

Continens Propoſit. XXXII. & XXXI. Apollonij.

IN ellypſi, & ſectionibus coniugatis parallelogrammum ſub axibus contentum æquale eſt parallelogrammo à quibuſcunque duabus coniugatis diametris comprehenſo, ſi eorum anguli æquales fuerint angulis ad centrum contentis à coniugatis diametris. a

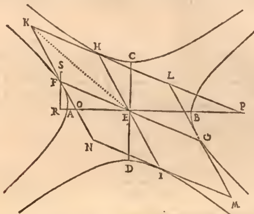
Sint duo axes A B, C D in ellipſi A C B D, ſiue in ſectionibus coniugatis A, B, C, D, & ſint F G, I H aliæ duæ coniugatæ diametri, & ducantur per puncta F, I, G, H, lineæ tangentes coniſectiones, quæ ſibi mutuo occurrant ad puncta K, L, M, N: & producatur A B ex vtraque parte vſque ad tangentes, eaſque ſecet in O; P, & ſit centrum E. Dico quod A B in C D æquale eſt ſpatio parallelogrammo M K: ſit itaque F R perpendicularis ad A B; & ponamus S R mediam proportionalem inter O R, R E.



Et quia quadratum A E ad quadratum E C eandem proportionem habet, quàm O R in R E, nempe quàm quadratum S R ad quadratum F R (37. ex 1.) erit A E ad E C nempe quadratum A E ad A E in E C, vt S R ad F R, nempe S R in O E ad F R in O E, & permutando erit quadratum A E, nempe R E in O E (39. ex 1.) b

ad

C ad S R in O E, vt A E in E C ad F R in O E, & quadratum O F ad quadratum E H, nempe triangulum E O F ad triangulum E H P (24. ex 2.) propter ſimilitudinem duorum triangulorum eſt, vt O R ad R E



(4. ex 7.), & ſpatium parallelogrammum E K medium proportionale eſt inter duplum trianguli E O F, & duplum trianguli E H P; & S R media proportionalis eſt inter O R, & R E, erit duplum trianguli E O F ad parallelogrammum E K, vt S R ad R E; nempe S R in O E ad R E, in O E, quæ oſtendetur eſſe, vt F R in O E, quod eſt æquale duplo trianguli O F E ad A E in E C; ergo parallelogrammum E K æquale eſt ipſi E A in E C, & propterea quadruplum illius ſpatij, quod eſt parallelogrammum M K æquale eſt ipſi B A in C D. Et hoc erat propoſitum.

* Hic eſt finis libri ſeptimi Apollonij, quemadmodum illum diſpoſui, & puto me præueniſſe in hoc quoſcunque alios, illumquè repoſui in Bibliotheca Domini Noſtri Regis Glorioſiſſimi, Beneficentiſſimi, Victorioſi; Deus vmbram illius conſeruet ſuper omnes famulos eius, & greges, & ad finem perducat omnia illius deſideria, & cogitationes, & labor famuli eius ſit iuxta eius beneplacitum; & Laus Deo Domino ſæculorum, & orationes eius ſint ſuper Maumethum, eiuſque ſequaces. Explicit anno DXIII. ſcribente Mahamudo filio Maſudi Medici Scirazeni decima die di Alkade Anno DCCCXXV.

** In ſequẽtibus Paraphraſtes Arabicus impiè, & Maumedanorum more loquitur.*

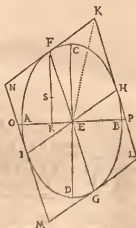
Notæ in Proposit. XXXI. & XXXII.

PLanum axium coniugatarum in ellipsi, &c. *Idest in sectionibus coniugatis, & in ellipsi rectangulum sub axibus coniugatis contentum æquale est parallelogrammo sub diametris coniugatis in angulo æquali, ei qui ad centrum à diametris continetur. In textu arabico reperitur numerus 9. in illa propositione, qua ellipsim considerat, sed mendose, vt arbitror debet potius censeri proposit. 32.* a

Et quia quadratum A E ad quadratum E C est, vt O R in R E, nempe quadratum S R ad quadratum F R, &c. *Quoniam axis rectus D C medius proportionalis est inter axim transuersum A B, eiusque latus rectum, quadratum A B ad quadratum D C, vel eorundem quadrantes, scilicet quadratum semiaxis A E ad quadratum semiaxis E C eandem proportionem habebit, quàm axis transuersus A B ad eius latus rectum, sed rectangulum E R O ad quadratum F R eandem proportionem habet, quàm axis transuersus A B ad eius latus rectum, atque quadratum S R æquale est rectangulo E R O (eo quod S R facta fuit media proportionalis inter E R, & R O) erit quadratum S R ad quadratum F R, vt latus transuersum A B ad eius latus rectum: quare quadratum A E ad quadratum E C eandem proportionem habebit, quàm quadratum S R ad quadratum F R: & A E ad E C eandem proportionem habebit, quàm S R ad F R: & sumptis altitudinibus A E, & O E erit quadratum A E, seu ei æquale rectangulum R E O ad rectangulum A E C, vt rectangulum sub S R, & sub O E ad rectangulum sub F R, & sub O E, & permutando rectangulum R E O ad rectangulum sub S R, & sub O E, seu vt R E ad S R eandem proportionem habebit, quàm rectangulum A E C ad rectangulum sub F R, & sub O E: & inuertendo rectangulum sub F R, & sub O E ad rectangulum A E C eandem proportionem habet quàm S R ad R E.* b

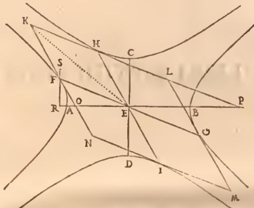
Prop. 37. lib. 1.

Ibidem.



Et

C Et quadratum F O ad quadratum E H, nempe triangulum E F O ad triangulum E H P, &c. *Quia G F, I H sunt diametri coniugatæ, quibus æquidistant contingentes F O, & L H erunt triangula E O F, & E H P similia, quorum latera homologa O F, & E H; & ideo triangulum E O F ad*



triangulum E H P eandem proportionem habebit, quàm quadratum O F ad quadratum E H: estque O R ad R E, vt quadratum O F ad quadratum E H, igitur triangulum E O F ad triangulum E H P eandem proportionem habebit, quàm O R ad R E. Ducatur postea recta linea E K, erit triangulum E F K medium proportionale inter duo similia triangula E O F, & E H P (eo quod triangulum E O F ad triangulum E F K aquè altum eandem proportionem habet quàm O F ad F K, seu ad latus E H ei homologum) posita autem fuit S R media proportionalis inter O R, & R E; ergo triangulum E O F ad triangulum E F K est vt S R ad R E: estquè parallelogrammum E K æquale duplo trianguli E F K; ergo duplum trianguli E O F ad parallelogrammum E K eandem proportionem habet, quàm S R ad R E; Et quia rectangulum sub O E, & sub perpendiculari R F æquale est duplo trianguli E O F (cum habeant basim O E communem, & eandem altitudinem perpendicularis R F); igitur rectangulum sub O E, & sub R F ad parallelogrammum E K eandem proportionem habebit, quàm S R ad R E: sed prius rectangulum sub O E, & sub R F ad rectangulum A E C eandem proportionem habebat, quàm S R ad R E: ergo idem rectangulum sub O E, & sub R F ad parallelogrammum E K eandem proportionem habet, quàm ad rectangulum A E C; & propterea parallelogram- Prop. 4. huius.

mum

mum E K æquale est rectangulo A E C; & eorum quadrupla erunt æqualia, scilicet parallelogrammum M K æquale erit rectangulo sub B A, & sub D C comprahenso. Quod erat propositum.

LIBRI SEPTIMI FINIS.



ARCHIMEDIS
LIBER ASSVMPTORVM
INTERPRETE
THEBIT BEN-KORA
EXPONENTE ALMOCHTASSO

Ex Codice Arabico manuſcripto
SERENISS. MAGNI DVCIS ETRVRIÆ,
ABRAHAMVS ECCHELLENSIS
Latinè vertit.

IO: ALFONSVS BORELLVS
Notis Illuſtrauit.



IO: ALFONSI BORELLI

Præfatio ad Lectorem.



I pulchrum illud Epicharmi effatum tenes (amice Lector) neruos , atque artus esse sapientiæ non temerè , ac imprudenter credere , non adeò facilis esse debes , vt Archimedis nomen lemmata hæc pretiosiora efficiens tibi imposturam , aut fucum facere patiaris , atque alterius contemptissimi auctoris opusculum immeritò tanto viro tribuas ; & siquidem maiores nostri æquum iudicium dixere , vt sine inuidia culpa plectatur , non ita morosus , ac difficilis esse debes , vt sua ei denegare velis leui quacumque suspicione , quæ facilè excuti pòssit ; verum ab omni præiudicio liberum te cupio , & memorem illius adagij : Ne quid nimis . Tibi igitur sic affecto notionem huius controuersiæ omnino relinquo , quod vt liberè , & ritè exequi valeas , sedato animo nullum meum iudicium interponens , afferam primò rationes , quibus persuaderi quis posset hoc opusculum iniuriâ Archimedi tributum fuisse , & mox coniecturas recensebo , quæ eiusdem Archimedis idipsum opus esse fortè non inaniter probant ; sicque pensitatis , & compositis vtrinque rationum ponderibus sententiam liberè pronuncies tuam per me licet .

Et primò animaduersione dignum est in Collect. Mathemat. Pappi Alexand. frequentissimè commemorari ea , quæ Archimedes conscripsit , præcipuè lib. 5. & lib. 8. De Spiralibus , de Solidis Polyedris , de Circuli Mensura , de Sphæra , & Cylindro , & multoties citantur , & transcribuntur Archimedeæ propositiones , neque vspiam huius Opusculi

(apud Arabes hactenus latentis) mentio vlla fit. Neque Ptol. in Magnæ Constr. lib. 2. tribuit Archimedi prop. 5. cap. 9. ibi relatam, cum tamen soleat esse adeò gratus, vt lib. 6. cap. 7. propositionem ab Archimede sumpsisse fateatur. Neque ipsemet Archimedes huius Opusculi vnquam meminit, qui alioqui valde prolixè enumerat, & recenset ea, quæ in proprijs libris continentur, & demonstrantur. Inexcusabiles insuper errores, atque allucinationes, quæ in huiusmodi propositionibus reperiuntur, immò puerilia alia Opuscula, quæ citantur vt Archimedis, satis apertè videntur ostendere nunquam diuinum illud ingenium huiusmodi minutias somniasse; cum, vt Carpus Antiochensis ait, referente Pappo, quæ præcipua sunt in Geometria, breuiter quidem, sed diligenter conscripserit Archimedes. Tandem præcipuæ propositiones huius Opusculi similes sunt eis, quæ recensentur quidem, & demonstrantur lib. 4. Collect. Mathem. Pappi Alex., easque Archimedis esse non asserit; immò in quibusdam libris antiquis circumferri affirmat.

Quod verò dictæ rationes tanti roboris, ac efficaciæ non sint, vt penitus euincant huiusmodi Opusculum ab aliquo alio tributum Archimedi fuisse, ex modo dicendis patebit. Et primo optimè norunt, qui in Pappi libris euoluendis vllam operam impenderunt lib. 7. Collect. recensere eum prolixè, & accuratè quamplurima opera Apollonij Pergæi, quorum pars maxima non extat, & enumerare propositiones, & lemmata vsque ad figuras, & tamen qui huiusmodi minutias curat, & adnotat, idem integra opera eiusdem Apollonij non commemorat. Sufficiant hæc insignia specimina. De admirandis astronomicis demonstrationibus à Ptolemæo summoperè laudatis lib. 12. cap. 1. Magnæ Constr., ne verbum quidem. De libro Comparationis Dodecaedri, & Icosaedri ab Ypsicle memorata, altum silentium. Si igitur idem Pappus opera Archimedis non ex professo, sed obiter, & sparsim commemorat, mirum non est tacuisse aliqua eius opera, vt sunt hæc lemmata.

Secundò Ptolemæus non affirmat lib. 2. prop. 5. proprio marte à se inuentam fuisse, nec eam Archimedi, aut alicui alij tribuit, quare fieri potuit, vt eam ex libro antiquo desumpserit, à quo nomen Archimedis casu expunctum fuisset, vt postea ostendetur.

Tertiò Archimedes quoque in suis libris existentibus Græcè, & Arabicè non recenset omnia opera à se conscripta, & edita, nam liber de insidentibus humido, & de Polyedris recensentur quidem à Pappo, non autem ab Archimede. Liber Mechanicus de Sphæropæia nominatur à (In proh. lib. 8. Lib. 5. pr. 17.)

Carpo

Carpo Antiochense apud Pappum. Liber de Figuris Isoperimetris asseruatur apud Arabes tantum; non igitur adulterina huiusmodi lemmata erunt, propterea quod Archimedes ea non nominat in paucis libris residuis, & fortè commemorata fuerunt in aliquibus alijs ex multis operibus eius iniuria temporum deperditis. In proh. lib. 8.

Quartò sane negari non possunt euidentissimi errores in hisce demonstrationibus, qui certè lemmatum auctori tribuendi non sunt, vt suis in locis adnotabo; explanatorum enim imperitia sæpenumero propositiones vniuersaliter pronunciatæ violenter in sensu particulari, & desormi exponuntur. Neque mirum est opera antiquorum magni nominis passim, & multis modis deformata fuisse transcriptorum incuria opponendo notas marginales, detrahendo, & superaddendo textui alienas sententias, ac testimonia, & hoc præcipue in codicibus Arabicis frequentissimè obseruauit Excell. Abrahamus Ecchellensis. Sed nihilominus in tanta transformatione à vetustate, & ignorantia amanuensium profecta vestigium aliquod subobscurum admirandi, & perspicui Archimedis ingenij dignoscitur.

Tandem non inani coniectura ex Pappi, & Eutocij testimonijs probari potest idipsum, quod Arabes ratum habent, scilicet Archimedem huius libelli auctorem fuisse. Et primo aio præter reliqua opera iam nota edidisse Archimedem librum Lemmatum, quod quidem deducitur ex Eutocio in Comment. prop. 4. *lib.* 2. *de Sphæra, & Cylindro, vbi ait:* Id, quod promiserat se demonstraturum, (*scilicet Archimedes*) in nullis exemplaribus reperire est, quare etiam Dionysodorum deprehendimus nunquam in ea incidisse, adeoque cum non potuerit relictum (*ab Archimede*) lemma attingere diuersam viam suscepit vniuersi problematis, quam deinceps describemus. Diocles porrò idipsum in libro à se de Pyrijs inscripto, promissum fuisse ab Archimede nunquam præstitum opinatus, supplere contendit, cuius conatum mox apponemus, quod & ipsum pariter à superius propositis discedit; itidem enim ac Dionysodorus alia demonstrandi ratione problema struit. IN QVODAM AVTEM VETERI LIBRO (neque enim diuturnæ pepercimus diligentiæ) suprascripta incidimus theoremata haud exiguam tamen habentia obscuritatem præ erratis, multiformiterque mendosa in figurationibus. Eandem equidem veritatem, quam inquirebamus, atque in parte domesticam Archimedi linguâ Doricam seruabant,

vita-

vſitatiſque pridem rerum nominibus conſcripta erant, quæ nunc parabola, recti coniſectione, quæ hyperbole, obtuſi anguli ſectione vocata; vt ex his ſuſpicari liceat EADEM IPSA FORTEAN ESSE, QVÆ IN FINE SCRIBENDA PROMITTEBANTVR; quare attentius incumbentes, (cum ipſam hypotheſim, qualiter perſcripta fuerat, præ mendarum copia (vt diximus) ſatis incommodam, & abſtruſam reperiremus,) ſenſum inde paucis elijcientes communi, & plana dictione (vt fieri potuit) deſcribimus. Vniuerſaliter autem primum theorema deſcribetur, vt definitis manifeſtetur, deinde reſolutis in problemate accomodabitur. *Inferius*

Præmiſſis autem problematis, quæ hic apponuntur, ſcilicet duplam eſſe ipſam D B ipſius B F, &c. (*Nota quod hic loquitur de lemmatibus adiunctis,*) *& paulò poſt*; animaduertendum eſt autem, & hæc quæ ab Archimede dicta ſunt conſonare ijs, quæ nos reſoluimus (*ſcilicet yſdem adductis lemmatibus*). *Deinde* cum dixerit, quod ſuperius dictum vniuerſaliter habet determinationem, adiectis autem problematibus ab eo inuentis, hoc eſt ipſam D B duplam eſſe ipſius B F, & ipſam B F maiorem ipſa F H, &c. *Hic manifeſtè Eutocius declarat propoſita lemmata in antiquo codice inuenta Archimedis fuiſſe.*

Hæc igitur conſentanea verbis Archimedis, qua fieri potuit, dilucidè expoſuimus.

Conſtat ergò ex Eutocij ſententia librum antiquum ab eo repertum, & recognitum, eſſe opus Archimedis, licet titulo Auctoris caruerit, & mendoſiſsimum eſſet, atque ignotum Dionyſodoro, Diocli, & plerisque Græcorum diu iacuiſſet; etenim ex ſtylo, ex ſubiecto promiſſo, ex lingua Dorica, & ex vocibus vetuſtis Archimedi familiaribus concluſit lemmata prædicta Archimedis fuiſſe. Sed adhuc difficultas hæret, nam licet concedamus ſcripſiſſe Archimedẽ, & ediſiſſe librum lemmatum ab Eutocio memoratum, diuerſus omnino erit ab eo, quem Thebitius Arabicè tranſtulit, nam in iſto non reperitur lemma illud, quod promiſerat Archimedes ſe demonſtraturum.

Hæc difficultas duplici coniectura ſi non frangi, ac reſolui ſaltem debilitari poteſt; liber enim antiquus lemmatum Archimedis ne dum titulo carebat ſuo, ſed erat valdè corruptus, deficiens, & mendoſus; quarè non ſine diuturno, ac pertinaci labore ſenſus illius lemmatis elicere potuit

Eutocius, vnde fieri potuit vt Græcus codex ad Arabes transmissus deterior, & magis mutilus adhuc fuerit eo exemplari, in quod incidit Eutocius, vel potius incuria, aut vitio librariornm Arabum, & amanuensium eiusdem codicis quamplurima lemmata perierunt, inter quæ assumptum in prop. 4. lib. 2. de Sphæra, & Cylindro excidit. E contrà aliquæ propositiones similes eis, quæ leguntur in hoc Arabico codice de Arbelo extant apud Pappum lib. 4. Collect. prop. 14. 15. & 16., quas ait circumferri in quibusdam libris antiquis, scilicet in libro Græco incerti Auctoris propositiones lemmaticas continente; at testimonio Thebitij magni nominis viri, & omnium Arabum, liber ex Græco translatus continens ferè eadem lemmata, quæ recensentur à Pappo, tribuitur Archimedi, sicuti prius Eutocius multiplici coniectura libri antiqui lemmatum à se reperti Archimedem auctorem fecit; quare ergo nos eisdem coniecturis persuasi eidem Achimedi tribuere dubitabimus Opusculum hoc ab Arabibus asseruatum, in quo si mendarum copiam spectes, simile omnino erit ei, quod Eutocius nactus est? Hæ sunt rationes, mi lector, quas tibi examinandas relinquo in hoc perplexo negotio nulla dissimulata difficultate.

Interim scito hoc manuscriptum Arabicè elegantissimè exaratnm in Bibliotheca Serenissimi Magni Etruriæ Ducis diù asseruatum fuisse; eius tamen editionis spe facta tandem anno 1658. Serenissimus Ferdinandus Secundus Magnus Etruriæ Dux Romæ asportandum humanissimè mihi credidit, vt rei litterariæ bono latinè traduceretur, præstitumque fuit opera, & studio celeberrimi, & peritissimi Orientalium linguarum professoris Abrahami Ecchellensis, ipsoque dictante religiosissimè, & accuratè ipse calamo excepi, in eoque paucula quædam in notis animaduertenda censui tum in contextu plurimis mendis corrupto, tum in scholijs Arabicis Almochtasso non admodum in Geometria versati. Addidi in fine huius libri duas alias Archimedis propositiones ab Eutocio repertas quarum altera fortasse illa eadem est quæ hic deficit, nam Almochtasso in proemio ait, propositiones huius Opusculi sexdecim esse, cum tamen postrema sit decimaquinta. Et licet hæc eadem lemmata anno præterito edita fuerint Londini, non tamen hac nostra editione fraudandus es, amice lector. Vale.

IN NOMINE DEI MISERICORDIS MISERATORIS

CVIVS OPEM IMPLORAMVS.

LIBER ASSVMPTORVM ARCHIMEDIS,

INTERPRETE THEBIT BEN-KORA,

Et exponente Doctore

ALMOCHTASSO ABILHASAN, Hali Ben-Ahmad Nosuensi.

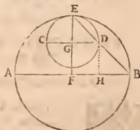
PROPOSITIONES SEXDECIM.



Sserit Doctor Almochtasso hunc librum referri ad Archimedem, in quo sunt propositiones pulcherrimæ paucæ numero, vtilitatis verò maximæ de principijs Geometriæ, optimæ atque elegantissimæ, quas adnumerant professores huius scientię summæ intermediorum, quæ legi oportet inter librum Euclidis, & Almagestum; at verò quædam illius propositionum loca indigent alijs propositionibus, quibus propositiones illæ clariores euadant. Et quidem ipse Archimedes has indicauit propositiones, easque retulit in alijs suis operibus, dum dixit quemadmodum demonstrauimus in propositionibus rectangulorum: item & quemadmodũ demonstrauimus in nostra expositione agentes de triangulis; rursus quemadmodum demonstrauimus in propositionibus quadrilaterum; & retulit in propositione quinta demonstrationem hac de re magis peculiarem. Deinde composuit Abusahal Alkuhi librum, quem inscripsit ordinationem libri Archimedis de assumptis, & tractauit demonstrationem huius propositionis via vniuersaliori, ac meliori, nec non ea, quę dependent ex compositione proportionis, quod quidẽ cum id comperi, attexui locis obscurioribus huius libri expositionem, seu marginales postillas, & confirmaui quod ille indicauerat propositionibus, vti iudicaueram, & retuli ex propositionibus Abisahal duas propositiones, quibus opus est ad propositionem quintã declarandam, reliquas omittens breuitatis gratia, & eo quod non sint necessarię.

PROPOSITIO I.

SI mutuo se tangant duo circuli, vt duo circuli A E B, C E D in E, fuerintque eorum diametri parallelæ, vt sunt duæ diametri A B, C D, & iungantur duo puncta B, D, & contactus E [lineis] D E, B D, erit linea B E recta.



Sint duo centra G, F, & iungamus G F, & producamus ad E, & educamus D H parallelam ipsi G F. Et quia H F æqualis est ipsi G D, suntque G D, E G æquales, ergo ex æqualibus F B, F E remanebunt G F, nempe D H, & H B, quæ erunt æquales, atque duo anguli H D B, H B D æquales. Et quia duo anguli E G D, E F B sunt recti, atq; duo anguli E G D, D H B sunt æquales, remanebunt duo anguli G E D, G D E, qui inter se, & duobus angulis H D B, H B D æquales erunt; ergo angulus E D G æqualis est angulo D B F, & comprehensus angulus G D B est communis, ergo erunt duo anguli G D B, F B D (qui sunt pares duobus rectis) æquales duobus angulis G D B, G D E: igitur ipsi quoque sunt æquales duobus rectis, ergo linea E D B est recta, & hoc est, quod voluimus.

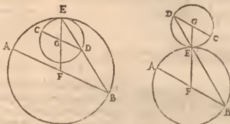
SCHOLIVM ALMOCHTASSO.

DIcit Doctor; Et quidem dici potest cum duo anguli H D B, H B D sint æquales, & angulus D H B rectus, quod erit angulus B D H semirectus, & similiter angulus E D G, & angulus G D H rectus, ergo tres anguli sunt æquales duobus rectis, igitur linea E D B est recta. Idem sequitur, si illi duo circuli se mutuo exterius contigerint.

Notæ in Proposit. I.

HAEc est vna earum Propositionum, quas Pappus in quodam libro antiquo reperit, qui, vt deduximus ex Eutocio, ab Archimede conscriptus diu apud Arabes latuit. Hac assumitur in proposit. 14. *lib.* 4. *Collect. Pappi, eamque supplet Commandinus, sed extat expresse lib.* 7. *proposit.* 110. *eiusdem Pappi, estque demonstratio vniuersalissima comprehendens casum neglectum in hac demonstratione, scilicet quando duo circuli sese exterius contingunt, & licet*

licet non laboret vitio Arabici textus, non tamen illa omnino ſincera eſt: conueniunt tamen in vniuerſalitate propoſitionis, quàm valde peruerſè ſcholiaſtes Arabicus expoſuit; allucinatur enim quando ait, & quia duo anguli E G

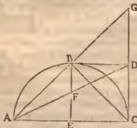


D, & E F B ſunt recti, &c. *Nam inferius citatur, & vſurpatur hæc prima propoſitio vniuerſaliſſimè, ſcilicet exiſtentibus angulis G, & F acutis, vel obtuſis, & ſic reuera ſonant verba propoſitionis, vbi ait,* quorum diametri A B, C D ſunt parallelæ, *& ſic pariter habetur in prædicta propoſitione Pappi; quare textus omnino corrigi debuit, vt pronuncientur anguli E G D, & E F B* æquales, *non recti. Neſcio tamen quomodo expoſitio Almochtaſſi excuſari poſſit, qui ſupponit diametros A B, & C D perpendiculares ad rectam lineam F G E, quod quidem in vnico caſu verificatur, vt dictum eſt. Peccat poſtea demonſtratio Pappi lib. 7. pr. 110., vbi conatur oſtendere duo centra, & punctum contactus circulorum eſſe in vnica recta linea; quod quidem in 3. Element. Eucl. oſtenſum ſupponi debuerat.*

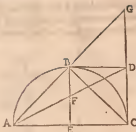
PROPOSITIO II.

SIt C B A ſemicirculus, quem D C, D B tangant, & B E perpendicularis ſuper A C, & iungamus A D, erit B F æqualis ipſi F E.

Demonſtratio. Iungamus A B, eamque producamus in directum, & educamus C D, quouſque illi occurrat in G, & iungamus C B. Et quia angulus C B A eſt in ſemicirculo, erit rectus, remanet C B G rectus, & D B E C eſt parallelogrammum rectangulum, ergo in triangulo G B C rectangulo educitur perpendicularis B D ex B erecta ſuper baſim, & B D, D C erunt æquales, eo quod tangunt circulum, ergo C D eſt etiam æqualis ipſi D G, quemadmodum oſtendimus in propoſitionibus,



 quas



quas confecimus de rectangulis. Et quia in triangulo G A C linea B E educta est parallela basi, & iam educta est ex D semipartitione basis linea D A secans parallelam in F, erit B F æqualis ipsi F E, & hoc est quod voluimus.

SCHOLIVM ALMOCHTASSO.

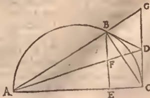
Dicit Doctor: Quod autem C D sit æqualis ipsi D G, vti remittit ad suum librum de propositionibus rectangulorum, eo quod duo anguli D C B, D B C æquales sunt propter æqualitatem D B, D C, & angulus D B C cum augulo D B G est rectus, & similiter angulus D C B cum angulo C G B: necesse est, vt sint duo anguli D G B, D B G æquales etiam, ergo duo latera D B, D G sunt æqualia.

Rursus si dicatur quod proportio C D ad D B sit vt proportio D B ad D G, & D C æqualis ipsi D B, ergo D B æqualis est D G, esset parabola. Dicit, quod vero B F sit æqualis F E, hoc constat ex eo quod casus A D super duas lineas B E, G C parallelas in triangulo A G C, exigit eorum sectio in eadem proportione, & id quidem, quia A D ad A F eandem proportionem habet, quam G D ad B F, & quam D C ad E F, ergo G D ad B F est vt D C ad E F, & permutando G D ad ei æqualem D C, est vt B F ad E F, & propterea ipsæ etiam sunt æquales.

Notæ in Propos. II.

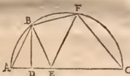
Hvius secundæ propositionis expositio, & demonstratio insigniter deformata est; in propositione enim supponuntur duæ rectæ D C, D B tangere circulum tantummodo, non autem constituere angulum rectum, & solummodo recta linea B E perpendicularis ducitur ad diametrum A C, quare male in demonstratione pronunciatur quadrilaterum B D C E parallelogrammum rectangulum, cum ferè semper sit Trapetium: pariterque errat, quando ait rectam B D perpendicularem esse super C G, quæ nunquam vera sunt, nisi in vnico casu, quando scilicet B E cadit perpendiculariter super centrum circuli.

Interim notandum est hanc elegantem propositionem, insignem vsum habere pro inuestigatione mensuræ circuli, & rectarum in eo subtensarum; deduci namque possunt non contemnenda problemata; Si enim quis cupiat circulo adscribere duas figuras ordinatas similes, quarum circumscripta superet inscriptam excessu minori quolibet dato, facile problema absoluetur, pariter-



pariterque proportio diametri ad circuli peripheriam satis compendiosè deduci potest, quandoquidem inter figuram ordinatam eidem circulo inscriptam, cuius semilatus est E B, & circumscriptam duplo laterum numero, cuius duo semilatera sunt C D B, circulus intermediat; & Perimeter circumscriptæ figuræ ad Perimetrum inscriptæ eandem proportionem habet, quam diameter C A ad A E, quæ proportio minui semper magis, ac magis potest in infinitum; & tandem ex 3. propos. sequenti, ex continua semipartitione quadrantis circuli elici possunt subtensæ successiuè subdiuisæ in infinitum, & propterea dabitur proportio diametri A C ad semisubtensam B E, sed datur quadratum ipsius B E, igitur datur rectangulum A E C sub segmentis diametri, & datur E C ex iam dicta 3. propos. igitur datur quoque E A; estque B E ad C D B, vt E A ad diametrũ A C, igitur quarta quantitas innotescet, scilicet recta C D B, quæ æqualia sunt vni lateri Poligoni circumscripti duplo laterum numero, & ideo habebitur mensura totius Perimetri tum Poligoni inscripti, cum circumscripti, quare mensura ipsius peripheriæ circuli, quæ intermedia est, facili negotio inuestigabitur.

PROPOSITIO III.



SIt C A segmentum circuli, & B punctum super illud vbicumque, & B D perpendicularis super A C, & segmentum D E æquale D A, & arcus B F æqualis arcui B A, vtique iuncta C F erit æqualis ipsi C E.

Demonstratio. Iungamus lineas A B, B F, F E, E B; & quia arcus B A æqualis est arcui B F, erit A B æqualis B F, & quia A D æqualis est E D, & duo anguli D sunt recti, & D B communis, ergo A B æqualis est B E, & propterea B F, B E sunt æquales; & duo anguli B F E, B E F sunt æquales. Et quia quadrilaterum C F B A est in circulo, erit angulus C F B cum angulo C A B ipsi opposito, immo cum angulo B E A, æqualis duobus rectis; sed angulus C E B cum angulo B E A, æquales sunt duobus rectis, ergo duo anguli C F B, C E B sunt æquales, & remanent C F E, C E F æqualas; ergo C E æqualis est C F, & hoc est quod voluimus.

Notæ in Proposit. III.

HAEc est propos. 5. cap. 9. lib. 1. Almag. Ptol., sed hic vniuersalius pronunciatur; Ptolomeus enim supponit segmentum A B C semicirculum esse, & ex cognita circumferentia A F, & corda F C, & illius medietate A B, quærit chordam A B; est enim rectangulum sub C A D æquale quadrato ipsius

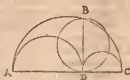
ipsius A B, estque nota A D medietas differentiæ inter diametrum A C, & chordam differentia F C; at propositio Archimedea verificatur in quolibet circuli segmento siue maiori, siue minori; ex datis enim circumferentijs A C, A B,



A F, & F C vna cum cordis A C, & F C, haberi quidem potest chorda A B paulo difficilius, si nimirum ex chorda A C tollatur chorda F C, & differentia A E bifariam secetur in D, & ex arcu cognito B C datur angulus A, atque angulus D rectus est, ergo triangulum A B D specie notum erit, & propterea proportio D A ad A B cognita erit, estque D A longitudine data, igitur A B longitudine innotescet.

Notandum est quod figura apposita in hac propos. non exprimit omnes casus propositionis, quandoquidem semicirculus est A B C, & propterea ex præcedentibus erroribus Arabici expositoris suspicari licet non ritè eum percepisse Archimedis mentem.

PROPOSITIO IV.



A B C semicirculus, & fiant super A C diametrum duo semicirculi, quorum vnus A D, alter vero D C, & D B perpendicularis, vtique figura proueniens, quam vocat Archimedes ARBELON, est superficies comprehensa ab arcu semicirculi maioris, & duabus circumferentijs semicirculorum minorum, est æqualis circulo, cuius diameter est perpendicularis D B.

Demonstratio. Quia linea D B media proportionalis est inter duas lineas D A, D C, erit planum A D in D C æquale quadrato D B, & ponamus A D in D C cum duobus quadratis A D, D C communiter, fiet planum A D in D C bis cum duobus quadratis A D, D C, nempe quadratum A C, æquale duplo quadrati D B cum duobus quadratis A D, D C, & proportio circulorum eadem est, ac proportio quadratorum, ergo

ergo circulus, cuius diameter eſt A C, æqualis eſt duplo circuli, cuius diameter eſt D B cum duobus circulis, quorum diametri ſunt A D, D C, & ſemicirculus A C æqualis eſt circulo, cuius diameter eſt D B cum duobus ſemicirculis A D, D C; & auferamus duos ſemicirculos A D, D C communiter, remanet figura, quàm continent ſemicirculi A C, A D, D C, & eſt figura, quàm vocauit Archimedes Arbelos æqualis circulo, cuius diameter eſt D B, & hoc eſt quod volumus.

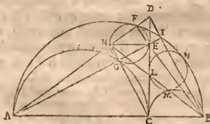
Notæ in Propoſit. IV.

HAEc forſan eſt vna earum propoſitionum, quas Pappus legit in libro antiquo de menſura ARBELI, ſeu ſpatij à tribus ſemicircumferentijs circulorum comprehenſi, vt ait Proclus, quæ quidem elegantiſſima eſt, eiuſque inuentionis Lunulæ Hyppocratis Chij originem extitiſſe puto; eſt enim Hyppocratis Lunula ſuperficies plana à quadrante peripheriæ circuli maioris, & ſemiſſe peripheriæ circuli ſubdupli comprehenſa: Arbelus vero recentiorum eſt ſpatium à triente, & à duobus ſextantibus circumferentiarum trium circulorum æqualium comprehenſum, & hiſce duobus ſpatijs facilè quadrata æqualia reperiri poſſunt; at Arbeli Archimedis, & Procli hucuſque reperta non eſt quadratura; ſed poteſt quidem aſſignari circulus prædicto ſpatio æqualis.

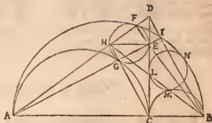
PROPOSITIO V.

SI fuerit ſemicirculus A B, & ſignatum fuerit in eius diametro punctum C vbicumque, & fiant ſuper diametrum duo ſemicirculi A C, C B, & educatur ex C perpendicularis C D ſuper A B, & deſcribantur ad vtraſque partes duo circuli tangentes illam, & tangentes ſemicirculos, vtique illi duo circuli ſunt æquales.

Demonſtratio. Sit alter circulorum tangens D C in E, & ſemicirculum A B in F, & ſemicirculum A C in G, & educamus diametrũ H E, erit parallela diametro A B, eo quod duo anguli H E C, A C E, ſunt recti, & iungamus F H, H A, ergo linea A F eſt recta, vti dictum eſt in propoſitione 1. & occurrent A F, C E in D, eo quod egrediuntur ab angulis A, C



A, C minoribus duobus rectis, & iungamus etiam F E, E B, ergo E F B est etiam recta, vti diximus, & est perpendicularis super A D, eo quod angulus A F B est rectus, quia cadit in semicirculum A B, & iungamus H G, G C, erit H C etiam recta; & iungamus E G, G A, erit E A recta, & producamus eam ad I, & iungamus B I, quæ sit etiam perpendicularis super A I, & iungamus D I; & quia A D, A B sunt duæ rectæ, & educta ex D ad lineam A B perpendicularis D C, & ex B ad D A perpendicularis B F; quæ se mutuo secant in E, & educta A E ad I est perpendicularis super B I, erunt B I D rectæ, quemadmodum ostendimus in Propositionibus, quas confecimus in expositione tractatus de triangulis rectangulis: & quia duo anguli A G C, A I B sunt recti, vtique B D, C G sunt parallelæ, & proportio A D ad D H, quæ est vt A C ad H E, est vt proportio A B ad B C, ergo rectangulum A C in C B æquale est rectangulo A B in H E; & similiter demonstratur in circulo L M N, quod rectangulum A C in C B æquale sit rectangulo A B in suam diametrum, & demonstratur inde etiam, quod duæ diametri circulorum E F G, L M N, sint æquales, ergo illi duo circuli sunt æquales. Et hoc est quod voluimus.



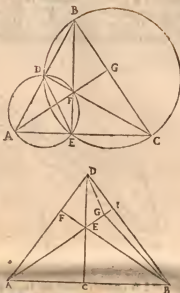
SCHOLIVM ALMOCHTASSO.

Dicit Doctor. Clarum quidem est quod citauit ex expositione triangulorum rectangulorum in præfatione; & est quidem propositio vtilis in principijs, ac præsertim in triangulis acutangulis, qua opus est in proposit. 6. huius libri, & est hæc. Ex triangulo A B C eduxit perpendiculares B E, C D se mutuo secantes in F, & coniunxit A F, & produxit ad G, hæc vtique erit perpendicularis super B C.

Iungamus itaque D E, erunt duo anguli D A F, D E F æquales, quia circulus comprehendens triangulum A D F transit per punctum E, eo quod angulus A E F est rectus, & cadent in illo super eundem arcum, & etiam angulus D E B æqualis est angulo D C B, quia circulus continens triangulum B D C transit etiam per punctum E, ergo in duobus triangulis A B G, C B D sunt duo anguli B A G, B C D æquales;

&an-

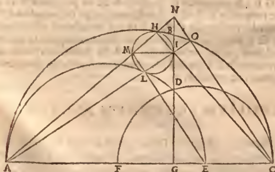
& angulus B est communis, ergo A G B æqualis est angulo C D B recto, ergo A G est perpendicularis super B C. Hoc præmisso repetamus ex proposit. quàm attulit Archimedes D A, A B, & perpendiculares D C, A I, B F, B I, & lineam D I. iam si B I D non fuerit linea recta, iungamus B G D rectam, erit angulus A G B rectus ex præmissa propositione, & erat angulus A I B rectus, ergo internus in triangulo B I G æqualis est opposito externo, & hoc est absurdum, igitur linea B I D est recta. Deinde attulit duas propositiones ex interpretatione Alkauhi, quarum prima est hæc,



SCHOLIVM PRIMVM ALKAVHI.

SI non fuerint duo semicirculi tangentes, sed mutuo se secantes, & perpendicularis fuerit in loco mutuæ sectionis, idem sequitur.

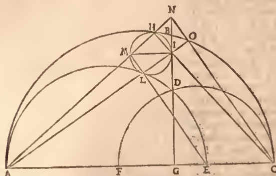
Sint itaque semicirculi A B C, A D E, F D C, & duo illi semicirculi se mutuo secantes in D, & B G perpendicularis super A C insistat,



 & cir-

& circulus I H L tangat circulum A B C in H, & circulum A D E in L, & perpendicularem in I. Dico esse æqualem circulo, qui est in altera parte. Hoc modo, Educamus I M parallelam ipsi A C, & iungamus A H, quæ transibit per M, quemadmodum demonstrauit Archimedes,

Prop. 1. huius.



& producamus eam quousque occurrat perpendiculari N G in N, & iungamus I A, quæ transibit per L, & producamus illam ad O, & iungamus C O, O N, quæ erit linea recta, & iungamus M E, quæ transibit per L, & iungamus C H, quæ transibit per I; & linea C O N parallela est lineæ E M, & proportio A N ad N M, nempe proportio A G ad I M est vt C A ad C E, ergo rectangulum A G in C E æquale est rectangulo C A in I M; & quia G D est perpendicularis in duobus circulis C D F, E D A super duas diametros C F, E A, erit rectangulum C G in G F æquale quadrato G D, & rectangulum A G in G E æquale etiam est illi, ergo rectangulum C G in G F æquale est rectanlo A G in G E, & proportio C G ad G A est vt proportio E G ad G F, immo vt proportio C E ad F A residuam; ergo rectangulum C G in F A, est æquale rectangulo C A in I M cui æquale est rectangulum G A in C E. Et si fuerit in altera parte circulus modo præfato eadem ratione ostendemus, quod restangulum C A in diametrum illius circuli æquale sit rectangulo C G in A F, & ostendetur quod duæ diametri duorum circulorum sint æquales.

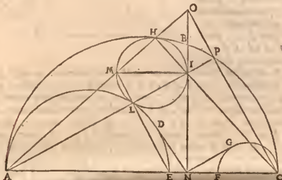
SCHOLIVM SECVNDVM ALKAVHI.

Porrò secunda est hæc. Dicit quod si duo semicirculi non sint tangentes, nec se mutuo secantes, sed separati, & perpendicularis transeat per concursum duarum linearum tangen-

tium

tium eos, quæ ſunt æquales idem ſequetur.

Sint itaque ſemicirculi A B C, A D E, F G C, vti diſpoſuimus, & duæ lineæ N G, N D tangentes illos duos ſemicirculos in G, D, & æquales, ſibique occurrentes in N, & linea B N tranſiens per punctum N perpendiculariter erecta ſuper A C, & tangat illam circulus M N I in I, & idem tangat circulum A B C in H, & circulum A D E in L,



& educamus diametrum I M parallelam ipſi A C, & iungamus C H, quæ tranſibit per I, & iungamus M E tranſibit per L, & iungamus A I tranſibit per L, & producamus eam ad P, & iungamus C O tranſibit per P, eritque parallela ipſi E M, & erit proportio A O ad O M, nempe proportio A N ad M I vt proportio A C ad C E, & rectangulum A N in C E æquale rectangulo A C in I M. Et eodem modo oſtendetur, quod rectangulum C N in F A ſit æquale rectangulo A C in diametrum circuli, qui eſt ex altera parte; & quia rectangulum C N in N F æquale eſt quadrato G N, & eſt æquale quadrato D N, quod eſt æquale rectangulo A N in N E erit rectangulum C N in N F æquale rectangulo A N in N E, & proportio C N ad A N vt E N ad N F, & vt proportio totius C E ad totum A F, ergo rectangulum A N in C E æquale eſt rectangulo C N in F A, & iam oſtenſum eſt, quod A N in C E æquale eſt rectangulo A C in I M, & quod rectangulum C N in F A ſit æquale rectangulo A C in diametrum alterius circuli: ergo duæ diametri ſunt æquales, & duo circuli æquales, & hoc eſt quæſitum.

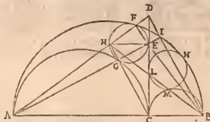
Prop. 1. huius. Ibidem. Scholium præc. Almoc.

Notæ in Propoſit. V.

HAEc *propoſitio parum quidem differt à poſtrema parte propoſit.* 14. 16. & 17. *lib.* 4. *Pappi Alex., ſi figuram, conſtructionem, & progreſſum*

 demon-

demonstrationis species; differunt tamen in conclusione, quæ demonstranda proponitur; ostendit enim Pappus, sicut, & Archimedes, semicircularis diametri segmentum maius A C ad circuli intercepti diametrum H E habere eandem proportionem, quàm maioris circuli diameter A B habet ad reliquum segmentum eius B C, pariterque B A ad A C eandem proportionem habet,



quàm C B ad reliqui circuli intercepti L M N diametrum: ex hisce sequitur conclusio Archimedea, nam si A C ad H E eandem rationem habet, quàm A B ad B C, permutando B A ad A C erit vt C B ad H E igitur eadem C B ad duas circulorum diametros H E, & L N eandem proportionem habet, & propterea circulorum diametri H E, & L N æquales sunt inter se. Mirum tamen est hanc conclusionem, quàm præ manibus Pappus habebat, non animaduertisse, demonstrat tamen quamplurima symptomata pulcherrima circulorum in Arbelo descriptorum, quæ tamen in hoc opusculo Archimedi tributo pariter recenseri debebant, si hic liber esset idem antiquus ille à Pappo visus, in quo huiusmodi lemmata circumferebantur: sed forsan librariorum vitio, & incuria codex corruptissimus ad Arabes transmissus non omnes illas admirandas propositiones, sed vnius tantum particulam continebat, sicut è contra liber ille antiquus, in quo Pappus prædicta lemmata reperit, carebat conclusione in hisce lemmatibus demonstrata. Cæterum propositiones in scholys additæ manifestæ quidem sunt, sed absque duabus prioribus posset propositum facillimè demonstrari, Reliquæ duæ propositiones superadditæ ad Arabibus faciles quidem sunt.

PROPOSITIO VI.

SI fuerit semicirculus A B C, & in eius diametro sumatur punctum D, & fuerit A D ipsius D C sexqui altera, & describantur super A D, D C duo semicirculi, & ponatur circulus E F inter tres semicirculos tangens eos, & educatur diameter E F in illo parallela diametro A C, reperiri debet proportio diametri A C ad diametrum E F.

Iungamus enim duas lineas A E, E B, & duas lineas C F, F B, erunt C B, A B rectæ, vti dictũ est in prima proposit. Describamus etiam duas lineas F G A, E H C, ostendeturque esse quoque rectas; Similiter duas lineas D E, D F, & iungamus D I, D L, & E M, F N, & producamus eas ad O, P; Et quia in triangulo A E D, A G est perpendi-

pendicularis ad E D, & D I est quoque perpendicularis ad A E, & iam se mutuo secuerunt in M, ergo E M O erit etiam perpendicularis, quemadmodum ostendimus in expositione, quàm confecimus de proprietatibus triangulorum, & cuius demonstratio iam quidem præcessit in superiori propositione; Similiter quoque erit F P perpendicularis super C A, & quia duo anguli, qui sunt apud L, & B sunt recti, erit D L parallela ipsi A B, & pariter D I ipsi C B, igitur proportio A D ad D C est vt proportio A M ad F M, immo vt proportio A O ad O P, & proportio C D ad D A vt proportio C N ad N E, immo vt proportio C P ad P O, & erat A D sesquialtera D C, ergo A O est sesquialtera O P, & O P sesquialtera C P, ergo tres lineæ A O, O P, P C sunt proportionales: & in eadem mensura, in qua est P C quatuor, erit O P sex, & A O nouem, & C A nouendecim, & quia P O æqualis est E F, erit proportio A C ad E F vt nouendecim ad sex, igitur reperimus dictam proportionem. Etiam si fuerit A D ad D C qualiscumque vt sesquitertia, aut sesquiquarta, aut alia, erit iudicium, & ratio, vti dictum est. Et hoc est quod voluimus.

Notæ in Proposit. VI.

HAEc propositio nil prorsus differre videtur à 16. proposit. lib. 4. Pappi Alex. est tamen pars illius, & particulariter demonstrata, quod quidem peccatum alieni expositori tribui debet; nunquam enim Archimedes propositionẽ illam, quam vniuersalissimè demonstrare potuisset, exemplis numericis tam pueriliter ostendisset. Pappus igitur quærit mensuram diametri illius circuli, qui in loco inter tres circunferentias circulares intercijcitur, quod Arbelon appellatur, & ostendit quidem diametrum semicirculi maioris A C secari in duobus punctis O, & P à perpendicularibus cadentibus à terminis E, & F diametri circuli in Arbelo inscripti, ac diuidi in tria segmenta A O, O P, P C continue proportionalia in eadem ratione, quàm habet A D ad D C, & insuper

super ostendit perpendicularem E O æqualem esse circuli diametro E F. Itaque in quadrato spatio E O P F, circuli diameter E F, siue O P media proportionalis erit inter A O, & P C. Quam ergo proportionem habent tres continuè proportionales in eadem ratione A D ad D C simul sumpta ad illarum intermediam, eandem habebit diameter maioris semicirculi A C ad O P, siue E F. Quæ deinde Pappus demonstrat perpendiculares à centris circulorum in collateralibus spatijs prædictis Arbeli existentium esse multiplices diametrorum eorum circulorum à quibus educuntur secundum seriem naturalem numerorum ab vnitate crescentium, proprietas quidem est admirabilis, de qua in hac propositione Archimedis altum silentium, quod forte temporum iniuria tribuendum est.

Possent in hisce duabus propositionibus non pauca problemata superaddi, quomodo nimirum in prædicto spatio à tribus semicirculis comprehenso circuli innumerabiles describi debeant, & alia quamplurima facilia, quæ lectorum sagacitati relinquuntur.

PROPOSITIO VII.

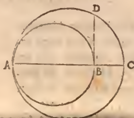
SI circulus circa quadratum descriptus fuerit, & alius intra illum, vtique erit circumscriptus duplus inscripti.

Sit itaque circulus comprehendens quadratum A B, circulus A B, & inscriptus C D, & sit diameter quadrati A B, & est diameter circuli circumscripti, & educamus C D diametrum circuli inscripti parallelam ipsi A E, quæ est ei æqualis. Et quia quadratum A B duplum est quadrati A E, siue D C, & proportio quadratorum ex diametris

metris circulorum eſt eadem proportioni circuli ad circulum, igitur circulus A B duplus eſt circuli C D, & hoc eſt quod voluimus.

SCHOLIVM ALMOCHTASSO.

DIcit Doctor Almochtaſſo. Iam compoſui tractatum de conficiendo circulo, cuius proportio ad datum circulum ſit vt proportio data. Qua ratione conficiendæ ſunt omnes figuræ rectilineæ, & quem vſum habeant in arte illæ figuræ, & afferam hic ex illis vnam propoſitionem, quæ cõgruit expoſitioni huius propoſitionis, & eſt tanquam epitome illarum propoſitionum, & illationis ex illis, & eſt hæc. Volumus conficere circulum, qui ſit quinta pars circuli, exempli gratia.



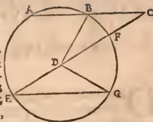
Circulus cuius habemus diametrum eſt A B, & addamus eius partem quintam, & eſt B C, & deſcribamus ſuper A C ſemicirculum A D C, & educamus perpendicularem B D, & quia proportio A B ad B C eſt, vt proportio quadrati A B ad quadratum B D, erit quilibet circulus factus, vel, figura ſuper B D quæſita à nobis, & hoc, quia proportio circuli, qui eſt ſuper A B, vel figuræ, quæ eſt ſuper illam, ad circulum, vel figuram factam ſuper B D facit illam figuram, & ſimiliter poſitam, erit vt proportio A B ad B C, & hoc eſt quod voluimus.

PROPOSITIO VIII.

SI egrediatur in circulo linea A B vbicumque, & producatur in directum, & ponatur B C æqualis ſemidiametro circuli & iungatur ex C ad centrum circuli, quod eſt D, & producatur ad E, erit arcus A E triplus arcus B F.

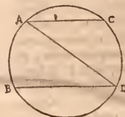
Educa-

Educamus igitur E G parallelam ipsi A B, & iungamus D B, D G: & quia duo anguli D E G, D G E sunt æquales, erit angulus G D C duplus anguli D E G, & quia angulus B D C æqualis est angulo B C D, & angulus C E G æqualis est angulo A C E, erit angulus G D C duplus anguli C D B, & totus angulus B D G triplus anguli B D C, & arcus B G æqualis arcui A E, triplus est arcus B F, & hoc est, quod voluimus.



SCHOLIVM ALMOCHTASSO.

Dicit Doctor Almochtasso. Cum dicit arcum B G æqualem esse arcui A E, id ex eo est propter æquidistantiam duarum cordarum. Sint itaque in circulo A B C cordæ A C, B D parallelæ; Dico quod duo arcus A B, C D sunt æquales,

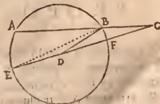


Iungamus A D, ergo duo anguli C A D, A D B sunt æquales; & propterea duo arcus sunt æquales, & conuersum eodem modo demonstratur.

Notæ in Proposit. VIII.

HAEc quidem propositio elegantissima est, quæ si problematicè resolui posset via plana, reperta iam esset tripartitio cuiuslibet anguli.

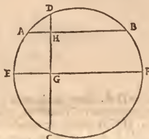
Breuius tamen demonstratio perfici potest hac ratione. Iuncta recta E B, quia in triangulo Isoscele B D C duo anguli C, & C D B æquales sunt, estque pariter externus angulus B D C duplus anguli D E B in triangulo Isoscelio D E B, ergo angulus C duplus est anguli B E C, & propterea illi anguli simul sumpti, seu externus angulus A B E triplus erit anguli B E F, & circunferentia A E tripla ipsius B F.



PROPOSITIO IX.

SI mutuo ſe ſecuerint in circulo duæ lineæ A B , C D , (ſed non in centro) ad angulos rectos , vtique duo arcus A D , C B ſunt æquales duobus arcubus A C , D B.

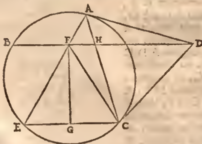
Educamus diametrum E F parallelam ipſi A B , quæ ſecet C D biſariam in G , erit E C æqualis ipſi E D ; & quia tam arcus E D F , quam E C F eſt ſemicirculus, & arcus E D æqualis arcui E A cum arcu A D , erit arcus C F cum duobus arcubus E A , A D æqualis ſemicirculo , & arcus E A æqualis arcui B F , ergo arcus C B cum arcu A D æqualis eſt ſemicirculo, & remanent duo arcus E C, E A nempe arcus A C cum arcu D B æquales illi , & hoc eſt quod volumus.



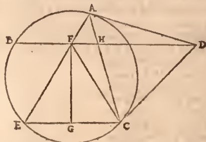
PROPOSITIO X.

SI fuerit circulus A B C , & D A tangens illum , & D B ſecans illum , & D C etiam tangens , & educta fuerit C E parallela ipſi D B , & iuncta fuerit E A ſecans D B in F , & educta fuerit ex F perpendicularis F G ſuper C E ; vtique biſariam ſecabit illam in G.

Iungamus A C , & quia D A eſt tangens , & A C ſecans circulum erit angulus D A C æqualis angulo cadenti in alterno ſegmento A C



nempe angulo A E C, & eſt æqualis angulo A F D, eo quod C E, B D ſunt parallelæ, ergo anguli D A C, A F D ſunt æquales, & in duobus triangulis D A F, A H D ſunt duo auguli A F D, H A D æquales, & angulus D communis, propterea erit rectãgulum F D in D H æquale

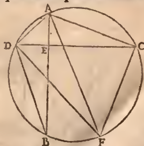


quadrato D A, immo quadrato D C, & quia proportio F D ad D C eſt eadem proportioni C D ad D H, & angulus D communis, erunt triangula D F C, D C H ſimilia, & angulus D F C æqualis D C H, qui æqualis eſt angulo D A H, & hic eſt æqualis angulo A F D, ergo duo anguli A F D, C F D ſunt æquales, & D F C æqualis angulo F C E, & erat D F A æqualis angulo A E C, ergo in triangulo F E C ſunt duo anguli C, E æquales, & duo anguli G recti, & latus G F commune, propterea erit C G æqualis ipſi G E, ergo C E bifariam ſecatur in G, & hoc eſt, quod voluimus,

PROPOSITIO XI.

SI mutuo ſe ſecuerint in circulo duæ lineæ A B, C D ad angulos rectos in E, quod non ſit in centro, vtique omnia quadrata A E, B E, E C, E D æqualia ſunt quadrato diametri.

Educamus diametrum A F, & iungamus lineas A C, A D, C F, D B; Et quia angulus A E D eſt rectus, erit æqualis angulo A C F, & angulus A D C æqualis A F C, eo quod ſunt ſuper arcum A C, & remanent in duobus triangulis A D E, A F C duo anguli C A F, D A E æquales erunt pariter duo arcus C F, D B æquales immo, & duæ cordæ eorum æquales, & duo quadrata D E, E B æquantur quadrato B D, nempe C F, & duo

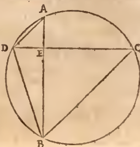


quadrata

quadrata A E, E C æquantur quadrato C A, & duo quadrata C F, C A æquantur quadrato F A, nempe diametri, igitur quadrata A E, E B, C E, E D omnia ſunt æqualia quadrato diametri, & hoc eſt quod volumus.

SCHOLIVM ALMOCHTASSO.

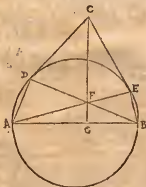
Dicit Doctor. Huius eſt alia facilior demonſtratio ea, quam attulit Archimedes; quæ eſt huiuſmodi. Iungamus A D, C B, B D; & quia angulus B E D eſt rectus, erunt duo anguli E B D, E D B æquales vni recto, & duo A D, B C, æquales ſemicirculo, ergo duæ cordæ eorum in potentia ſunt æquales diametro; ſed duo quadrata A E, D E æqualia quadrato A D, & duo quadrata C E, B E ſunt æqualia quadrato C B, ergo quadrata A E, E B, C E, E D æqualia ſunt quadrato diametri; & hoc eſt quod voluimus.



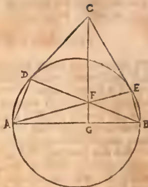
PROPOSITIO XII.

Si fuerit ſemicirculus ſuper diametrum A B, & eductæ fuerint ex C duæ lineæ tangentes illum in duobus punctis D, E, & iunctæ fuerint E A, D B ſe muto ſecantes in F, & iuncta fuerit C F, & producatur ad G, erit C G perpendicularis ad A B.

Iungamus D A, E B. Et quia angulus B D A eſt rectus, erunt duo anguli D A B, D B A reliqui in triangulo D A B æquales vni recto, & angulus A E B rectus, igitur ſunt æquales ei, & ponamus angulum F B E communem, ambo anguli D A B, A B E ſunt æquales F B E, F E B, immo angulo D F E externo in F B E. Et quia C D eſt tangens circulum, & D B ſecans illum, angulus C D B æquatur angulo D A B, & pariter angulus C E F æquatur angulo E B A, ergo duo anguli C E F, C D F ſimul æquales ſunt angulo D F E. Et iam quidem planum fit ex noſtro tractatu de figuris quadrilateris, quod ſi educan-



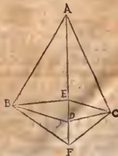
tur inter duas lineas æquales sibi occurrentes in aliquo puncto, vti sunt duæ lineæ C D, C E, duæ lineæ se mutuo secantes, vti sunt duæ lineæ D F, E F, & fuerit angulus ab illis contentus vt est angulus F æqualis duobus angulis, qui occurrunt duabus [lineis] se inuicem secantibus, vti sunt duo anguli E, D simul, erit linea egrediens à puncto concursus ad punctum sectionis, vti est linea C F æqualis cuilibet linearum sibi occurrentium, vt C D, vel C E, propterea erit C F æqualis ipsi C D, ergo angulus C F D est æqualis angulo C D F, nempe angulo D A G, sed angulus C F D cum angulo D F G est æqualis duobus rectis, ergo angulus D A G cum angulo D F G æqualis est duobus rectis, & remanent in quadrilatero A D F G duo anguli A D F, A G F æquales duobus rectis, sed angulus A D B rectus est, ergo angulus A G C est rectus, & C G perpendicularis ad A B, & hoc est quod voluimus.



SCHOLIVM ALMOCHTASSO.

Dicit Doctor de demonstratione, quàm citat ex tractatu de figuris quadrilateris. Sint duæ lineæ æquales sibi occurrentes A B, A C, & punctum concursus A, & se inuicem secantes B D, D C, & punctum sectionis D, & sit angulus B D C æqualis duobus angulis A B D, A C D, & iungamus A D; Dico quod sit æqualis A B.

Alioquin vel est minor A B, vel maior illa, & sit maior, & abscindatur A E æqualis A B, & iungamus B E, ergo duo anguli A E B, A B E, sunt æquales; sed angulus A E B maior est angulo A D B, & pariter angulus A E C, qui est æqualis A C E maior est angulo A D C, omnes ergo anguli B E C, vel duo anguli simul A B E, B C E maiores sunt duobus angulis A B D, A C D, pars suo toto, quod est absurdum. Deinde sit A D minor quàm A B, & ponamus A F æqualem A B, & iungamus B F, F C, remanet, vt dictum est, quod angulus F,



immo

immo duo anguli A B F, A C F minores sint duobus angulis A B D, A C D, totum sua parte, & hoc est absurdum, ergo manet propositum.

Notæ in Proposit. XII.

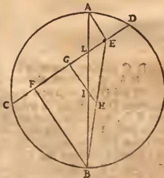
Lemma assumptum in demonstratione huius pulcherrima propositionis potest directè ostendi hac ratione.

Si in quadrilatero A C D B duo latera A C, & A B aqualia fuerint, atque angulus C D B aqualis duobus angulis C, & B simul sumptis. Dico rectam A D ipsi A C, vel A B aqualē esse. Producatur C A, in E, vt A E fiat aqualis A B, iungaturque B E. Quia in triangulo Isoscelio B A E angulus E aqualis est angulo A B E, & angulus C D B aqualis est duobus angulis C, & D B A simul sumptis, ergo duo anguli C D B, & E (oppositi in quadrilatero C D B E) aquales sunt tribus angulis C, D B A, & A B E, seu duobus angulis C, & D B E, sed quatuor anguli quadrilateri E C D B aquales sunt quatuor rectis, ergo duo anguli oppositi E, C D B duobus rectis aquales sunt, & propterea quadrilaterum ipsum circulo inscribi potest, cuius circuli centrum erit A, eum tres recta linea C A, A B, A E aquales posita sint, & propterea A D radius quoque circuli erit aqualis ipsi C A.



PROPOSITIO XIII.

SI mutuo se secent duæ lineæ A B, C D in circulo, & fuerit A B diameter illius, at non C D, & educantur ex duobus punctis A, B duæ perpendiculares ad C D, quæ sint A E, B F, vtique abscindent ex illa C F, D E æquales.



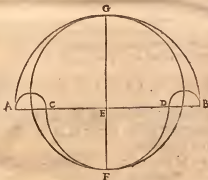
Iungamus E B, & educamus ex I, quod est centrum, perpendicularem I G super C D, & producamus eam ad H in E B. Et quia I G est perpendicularis ex centro ad C D illam bifariam diuidet in G, & quia I G, A E sunt duæ perpendiculares super illam, erunt paral-

lelæ,

lelæ, & quia B I æqualis eſt I A, erit B H æqualis ipſi H E, & propter earum æqualitatem, & quia B F eſt parallela ipſi H G, erit F G æqualis ipſi G E, & ex G C, G D æqualibus remanent F C, E D æquales. Et hoc eſt quod voluimus.

PROPOSITIO XIV.

SI fuerit A B ſemicirculus, & ex eius diametro A B diſſectæ ſint A C, B D æquales, & efficiantur ſuper lineas A C, C D, D B ſemicirculi; & ſit centrum duorum ſemicirculorum A B, C D punctum E, & ſit E F perpendicularis ſuper A B, & producatur ad G; vtique circulus, cuius diameter eſt F G æqualis eſt ſuperficiei contentæ à ſemicirculo maiori, & à duobus ſemicirculis qui ſunt intra illum, & à ſemicirculo medio qui eſt extra illum, & eſt figura, quam vocat Archimedes Salinon.

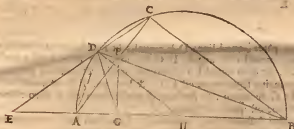


Quia D C biſariam ſecatur in E, & addita eſt illi C A, erunt duo quadrata D A, C A dupla duorum quadratorum D E, E A, ſed F G æqualis eſt ipſi D A, ergo duo quadrata F G, A C dupla ſunt duorum quadratorum D E, E A: & quia A B dupla eſt A E, & C D dupla quoque E D, erunt duo quadrata A B, D C quadrupla duorum quadratorum D E, E A, immo dupla duorum quadratorum G F, A C ſimiliter etiam duo circuli, quorum diametri ſunt A B, D C dupli ſunt eorum, quorum diametri ſunt G F, A C, & dimidij eorum, quorum diametri ſunt A B, C D æquales duobus circulis, quorum diametri ſunt G F, A C, ſed circulus, cuius diameter A C, eſt æqualis duobus ſemicirculis

micirculis A C, B D, ergò ſi auferamus ex illis duos ſemicirculos A C, B D, qui ſunt communes, remanet figura contenta à quatuor ſemicirculis A B, C D, D B, A C, (quæ ea eſt, quàm vocat Archimedes Salinon) æqualis circulo, cuius diameter eſt F G, & hoc eſt quod volumus.

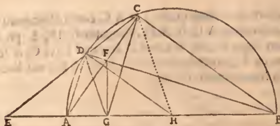
PROPOSITIO XV.

SI fuerit A B ſemicirculus, & A C corda Pentagoni, & ſemiſſis arcus A C ſit A D, iungatur C D, & producatur vt cadat ſuper E, & iungatur D B, quæ ſecet C A in F, & ducatur ex F perpendicularis F G ſuper A B, erit linea E G æqualis ſemidiametro circuli.



Iungamus itaque lineam C B, & ſit centrum H, & iungamus H D, D G, & A D. Et quia angulus A B C, cuius baſis eſt latus Pentagoni, eſt duæ quintæ partes recti, quilibet duorum angulorum C B D, D B A eſt quinta pars recti, & angulus D H A duplus eſt anguli D B H, ergo angulus D H A eſt duæ quintæ partes recti. Et quia in duobus triangulis C B F, G B F duo anguli B ſunt æquales, & G, C recti, & latus F B commune, erit B C æquale ipſi B G: & quia in duobus triangulis C B D, G B D duo latera C B, B G ſunt æqualia, & ſimiliter duo anguli ad B, & latus B D commune, erunt duo anguli B C D, B G D æquales, & quilibet eorum eſt ſex quintæ partes recti, & eſt æqualis angulo D A E externo quadrilateri B A D C, quod eſt in circulo, ergo remanet angulus D A B æqualis angulo D G A, & erit D A æqualis ipſi D G. Et quia angulus D H G eſt duæ quintæ partes recti, & angulus D G H ſex quintæ partes recti, remanet angulus H D G duæ quintæ partes recti, & erit D G æqualis G H. Et quia A D E externus quadrilateri A D C B, quod eſt in circulo, eſt æqualis angulo C B A, & eſt duæ

duæ quintæ partes recti, & æqualis angulo G D H. Et quia in duobus triangulis E D A, H D G sunt duo anguli E D A, H D G æquales, & pariter duo anguli D G H, D A E, & duo latera D A, D G, erit E A æquale H G, & ponamus A G commune, erit E G æquale A H, & hoc est quod voluimus.



Et hinc patet; quod linea D E æqualis sit semidiametro circuli, quia angulus A æqualis est angulo D G H, ideo erit linea D H æqualis lineæ D E. Et dico quod E C diuiditur media, & extrema proportione in D, & maius segmentum est D E: & hoc quia E D est corda hexagoni, & D C decagoni, & hoc iam demonstratum est in libro elementorum, & hoc est quod voluimus.

Impie vt Mahumetanus Paraphrastes loquitur.

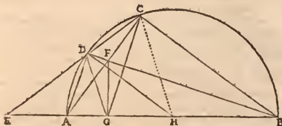
Finis libri Assumptorum Archimedis. Laus Deo soli, & orationes eius sint super Dominum nostrum Mahometum, & suos socios.

Notæ in Proposit. XV.

Ex hac propositione non pauca colligi possunt; Si enim coniungantur rectæ lineæ C H, & C G, erit triangulum B C E isoscelium simile triangulo H D E, & similiter positum; pariterque triangulum H C G simile quidem erit ipsi G D A, & in vtrisque bases similiter secantur, nam angulus B C E in tres partes æquales diuiditur à rectis lineis H C, & G C, quarum qualibet duæ quintæ partes est vnius recti, atque angulus E C G rursus bifariam diuiditur à recta C A: non secus tres anguli E D A, A D G, & G D H æquales sunt inter se, atque quilibet eorum duæ quintæ vnius recti. Et efficiuntur quatuor rectæ lineæ E A, A D, D G, D C, inter se, & lateri decagoni regularis circulo inscripti æquales. Pari modo rectæ lineæ E D, E G, G C, H C, H A, æquales sunt inter se, & lateri hexagoni regularis circulo inscripti. Tandem recta linea C B subtendens tres partes decimas circumferentiæ totius circuli æqualis est rectæ lineæ C E, scilicet composita ex latere hexagoni, & latere decagoni regularium eidem circulo inscriptorum. Præterea

recta

recta linea E G secatur in A extrema, ac media ratione, cuius maius segmentum est E A latus decagoni, & recta A H similiter diuiditur in G, cuius maius segmentum est G H decagoni latus, & tota E H secatur in A, & G extrema, ac media ratione, pariterque recta E B similiter secatur in H, cuius



minus segmentum H B est aequale lateri exagoni circulo inscripti. Breuius tamen propositio sic demonstrari posset.

Quia ostensa est C D aequalis D G, & A D aequalis est eidem D C; cum ambo sint latera decagoni, ergo D G aequalis est D A. Postea iuncta A C, quia angulus A H D, vel C H D quinta pars est duorum rectorum, ergo angulus C D H ad basim isosceli, duae quinta partes erit duorum rectorum, & ideo angulus C D H duplus erit anguli D H E, estque externus angulus C D H aequalis duobus internis, & oppositis D H E, & D E H in triangulo D E H, ergo angulus C D H duplus quoque erit reliqui anguli E, & propterea angulus D H E aequalis erit angulo E, & subtensa latera D E, D H aequalia quoque erunt, sed prius D A, D G aequalia erant subtendentia angulos aequales, & reliqui anguli eiusdem speciei sunt, igitur E A aequalis est H G. Reliqua manifesta sunt.

In praefatione huius operis memini non esse omnino improbabile hunc libellum Archimedis non alium fuisse ab illo antiquo lemmatum libro ab Eutocio reperto, quod praecipuè ex verbis eiusdem Eutocij in Comment. proposit. 4. lib. 2. de Sphaera, & Cylindro comprobatum fuit: illa fidelissimè translata ex textu Graeco ab amicis doctissimis cum iam in praefatione excusa essent aliam translationem ex Arabico Manuscripto Serenissimi Magni Ducis misit Excell. Abrahamus Ecchellensis desumptam ex editione Abusahli Alkuhi qui pariter librum ordinationis lemmatum Archimedis conscripsit, vt in proemio huius operis testatur Almochtasso. Verba eius sunt haec, quae paulò clarius propositum confirmare videntur: & meminit Eutocius Ascalonita in Comment. huius libri, quod Archimedes promiserit demonstrationem huius in hoc suo libro, quod in nullo exemplari reperitur, quod promisit. Atque ita vnusquisque tam Dyonisodorus, quàm Diocles post illum progressus est per aliam viam, quàm ille (scilicet Archimedes) in hoc libro in diuisione Sphaerae in duas partes, quae datam habeant proportionem. Dixit, & ego reperi in

Fff Veteri

Veteri Libro Theoremata fatis obscura propter multitudinem errorum, qui in eo sunt, nec non menda, quæ occurrunt in figuris propter ignorantiam amanuensium, erantque in eo Doricæ dictiones, quarum vsus Archimedi familiaris erat, & vocabula ipsi propria; hinc vtebatur loco sectionum parabolæ, & hyperbolæ, rectanguli, & obtusanguli coni sectionibus quamobrem operam ipsi nauaui, donec assecutus sum istam propositionem, & est ista, &c.

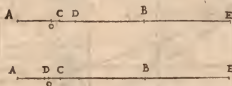
Modo quia in prædicto libro antiquo ab Eutocio reperto recensentur duæ propositiones, quarum vnam promiserat se demonstraturum Archimedes, & vtraque in nostro opusculo iniuria temporum deficit: earum altera forsan erit 16. illa propositio in proemio ab Almochtasso numerata vbi ait propositiones huius opusculi sexdecim esse, cum tamen postrema sit 15. quare inutile forsan non erit eas hic reponere, præcipuè quia Eutocius non rite eas restituit, nec omninò repurgauit à mendis, quibus scatebat exemplar antiquum ab ipso inuentum. Et primo noto, quod Eutocius eas vocat theoremata, cum potius problemata sint, & sic etiam ab eodem Eutocio postmodum appellantur. Forsan hoc accidit, quia in libro illo antiquo in formam theorematum scripta erant, sed Eutocius vt ad propositionem Archimedis ea accomodaret, forma problematica ea exposuit. Rursus Eutocius primum theorema se expositurum pollicetur, vt deinde analysi problematis Archimedei accomodetur. Vnde conijcere licet alterum theorema additum, vel alteratum ab Eutocio, vel ab aliquo alio fuisse, in quo proponit, quod, si aliqua recta linea secta sit in duo segmenta, quorum vnum duplum sit alterius, solidum parallelepipedum rectangulum contentum sub quadrato maioris, & sub minore segmento maximum erit omnium similium solidorum, quæ ex diuisione eiusdem rectæ lineæ in quolibet alio eius puncto consurgunt. Et hoc quidem ostenditur per sectiones conicas, contra artis præcepta; peccatum enim est non paruum apud Geometras, problema planum per conicas sectiones resoluere cum via plana absolui possit, hoc autem preclari nonnulli viri pariter adnotarunt, & præstiterunt, vt nuper accepi.

PROPOSITIO XVI.

SI recta linea A B sit tripla A C, non vero tripla ipsius A D; Dico parallelepipedum rectangulū contentum sub quadrato C B in A C maius esse parallelepipedo sub quadrato D B in A D.

Producatur A B in E, vt sit B E æqualis B C. Quoniam B C dupla erat ipsius A C, erit E C quadrupla ipsius A C, & propterea rectangulum A C E æquale erit quadruplo quadrati A C, scilicet æquale erit quadrato C B: Est vero in primo casu, rectangulum A D E maius rectangulo A C E, in secundo vero minus, (eo quod punctum D in primo casu propinquius est semipartitioni totius A E, quàm C, in secundo verò remotius); igitur si fiat C D ad D O, vt quadratum C B ad rectangulum

gulum A D E, erit in primo cafu D O maior, quàm C D, in fecundo vero minor; & propterea A O minor erit, quàm A C in vtroque cafu. Et quia quadratum C B ad rectangulum A D E eft vt C D ad D O, igitur folida parallelepipeda reciproca erunt æqualia, fcilicet folidum qua-



drato C B in D O ducto æquale erit folido, cuius bafis rectangulum A D E, altitudo vero C D, feu potius æquale erit folido, cuius bafis rectangulum E D C, altitudo vero A D, & propterea vt quadratum B C ad rectangulum E D C, ita erit reciproce A D ad D O, & comparando antecedentes ad terminorum differentias in primo cafu, & ad eorundem fummas in fecundo cafu, erit quadratum B C ad quadratum D B vt A D ad A O, & denuo folidum parallelepipedum rectangulum contentum fub quadrato B C in A O æquale erit ei, cuius bafis quadratum D B, altitudo vero A D: Eft vero A O oftenfa minor, quàm A C in vtroque cafu, igitur parallelepipedum, cuius bafis quadratum B C, altitudo A C maius eft eo, cuius bafis eft idem quadratum B C, altitudo A O; ideoque parallelepipedum, cuius bafis quadratum B C, altitudo A C maius eft quolibet parallelepipedo, cuius bafis quadratum B D, altitudo A D: quare patet propofitum.

PROPOSITIO XVII.

SIt A B tripla ipfius A E, maior vero quàm tripla alterius C A, fecari debet eadem A B citra, & vltra E, in O, ita vt parallelepipedum, cuius bafis quadratum O B, altitudo O A æquale fit parallelepipedo, cuius bafis quadratum E B, altitudo A C.

Fiat rectangulum A C B F, & producantur latera C A, F B, & fiat rectangulum C F N æquale quadrato E B, & ducta diametro C E G com-

Prop.52. lib.1. pleantur parallelogramma rectangula A L, A K, L B, B K, atque axe F G, latere recto F N describatur parabole F M secans H G in M; erit
Prop.11. lib.1. igitur in parabola quadratum M G æquale rectangulo G F N sub abscissa, & latere recto contento, ideoque idem quadratum F G ad rectangulum N F G, atque ad quadratum M G eandem proportionem habebit: est vero quadratum F G ad rectangulum N F G, vt F G ad F N, cum

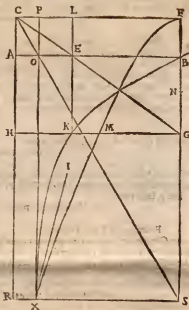
C L P F A E O B R X S N H K M G I

F G sit illorum altitudo communis, nec non vt C F G ad C F N sumpta nimirum C F communi altitudine, ergo rectangulum C F G ad C F N eandem proportionem habebit, quam quadratum F G ad quadratum M G, & permutando rectangulum C F G ad quadratum F G erit vt rectangulum C F N ad quadratum G M, sed vt rectangulum C F G ad quadratum F G, ita est C F ad F G, & E A ad A C, igitur E A ad A C erit vt rectangulum C F N ad quadratum G M, seu vt quadratum E B, vel K G ad quadratum G M: est vero A C minor, quàm A E, quæ triens est totius A B, igitur M G minor est, quàm G K. Postea
Prop.4. & 12. lib.2. per B circa asymptotos A C F describatur hyperbole B K, quæ transibit per punctum K, cum parallelogramma A F, & C K æqualia sint propter diagonalem C E G, quare punctum M paraboles cadet intra hyperbolem B K, sed parabole F M occurrit asymptoto C F in vertice F, & occurrit etiam asymptoto C A in aliquo alio puncto, cum C
Prop.26. lib.1. A sit parallela axi F G paraboles, & hyperbole semper intra asymptotos incedat, igitur parabola F M bis hyperbolæ occurrit supra, & infra pun-
ex 1. & 2. lib.2. ctum M: sint occursus X, à quibus ductis parallelis ad asymptotos compleantur parallelogramma R P, & A F, quæ erunt æqualia inter asym-
Prop.12. lib.2. ptotos, & hyperbolen constituta, & propterea C O S parallelogrammorum diameter erit, & vna linea recta: & quia O A ad A C est vt C F ad F S, siue vt rectangulum C F N ad rectangulum S F N: erat autem quadratum E B æquale rectangulo C F N ex constructione, & quadra-

tum

Prop. 11. lib. 1.

tũ O B, siue X S in parabola æquale est rectangulo S F N, ergo A O ad A C est vt quadratum E B ad quadratum O B, & propterea parallelepipedum, cuius basis quadratum O B, altitudo O A æquale erit parallelepipedo base quadrato E B, altitudine A C contento, quod erat propositum.



Ex hisce propositionibus deducit insuper Eutocius aliqua, quæ non omnino firma, & certa mihi videntur, nam ex eo quod recta linea vt I X tangit vtramq; conisectionem (hyperbolen scilicet B X, & parabolen F X) in eodem puncto X concludit hyperbolen interius contingere parabolen quàm deinceps non secat ad easdem partes axis illius. Hoc autem omnino necessarium nõ est ex demonstratis à me in prop. 20. 21. & 22. Addit. lib. 6. Apoll. fieri enim potest vt Parabole exterius hyperbolen tangat in X, & postea hinc inde eam secet. Potest insuper hyperbole secare eandẽ parabolam in eodem puncto X, licet ambo in eodem puncto tangantur ab aliqua recta linea, vt est I X; quod quidem adnotasse fuit operepretium.

FINIS.

Dominus Carolus de Datis videat, & referat an in hoc opere sit aliquid quod repugnet fidei Catholicæ, & bonis moribus. Die 3. Iulij 1660.

Vinc. de Bardis Vicar. Gener. Florent.

Illustrissime, ac Reuerendiss. Dom.

Vidi hæc antiquorum, maximorumq; Geometrarum Apollonij, atq; Archimedis Opera nunquam edita, nec in ijs reperi aliquid fidei Catholicæ, & bonis moribus aduersum; Quamobrem maximo Reip. literariæ bono, & gloria eorum qui in ijs vertendis, atq; illustrandis studium, atque operam felicissimè collocarunt euulganda censeo: dummodo quædam loca notentur Arabicorum interpretum, quibus Maumedanos se præbent. Florentiæ die 7. Iulij 1660.

Carolus Dati manupropria.

Imprimatur seruatis seruandis 7. Iulij 1660.

Vinc. d. Bardis Vicar. Gener. Flor.

Excellentiss. Aduocatus Dominus Augustinus Coltellini S. Offic. Florentiæ Consultor videat hoc opus intitulatum APOLLONII PERGÆI, &c. & referat.

Die 7. Iulij 1660.

Fr. Ang. Octau. de Populo S. Offic. Flor. Canc. de mand.

Reuerendiss. Pater Domine.

Duorum Geometriæ luminum monumenta, quæ diu in tenebris sepulta, adeò studiosorum oculos latuerunt, vt inter deperdita frustra desiderarentur, & nunc Opera Clariss. Virorum, versa, & illustrata in lucem prodeunt remoranda non puto; cum etsi Ethnico fonte cadant, nihil tamen (salutaribus monitis Arabica interpretum superstitione detecta) aduersus Christianam pietatem contineant.

August. Coltellini S. Officij Consultor, & librorum censor.

Stante supradicta attestatione Imprimatur. Die 16. Iulij 1660.

Fr. Ang. Octau. de Populo S. Off. Florent. Cancell. demand.

Alexander Victorius Senator Sereniss. MagniDucis Auditor.

REGISTRVM.

* ** *** **** A B C D E F G H I K L M N O P Q R S T V X Y Z
Aa Bb Cc Dd Ee Ff Gg Hh Ii Kk Ll Mm Nn Oo Pp Qq Rr Sſ Tt Vu Xx Yy Zz
Aaa Bbb Ccc Ddd Eee Fff

Omnes sunt duerni, excepto * qui est ternus.

Errata præcipua sic corrige.

PAgina 7. linea 27. ad margine. prop. 3 huius. pag. 14. lin. 4. ad differentiam. p. 24. l. 21. marg. prop. 2. addit. p. 31. l. 27. marg. in lib. 1. lin. 34. & B A. lin. 40. I D, D K. p. 32. l. 15. & D H. p. 36. l. 21. figura) p. 40. l. 17. (53. ex 5.) l. 33. intercipiuntur, &. l. 38. ergo C A. p. 46. l. 5. ita inquam. p. 49. l. 35. compensabatur insuper. p. 50. l. 46. B G b, & d o b. p. 56. l. 15. marg. 4. & 13. l. 48. pariterque L D. p. 62. l. 7. fit D A. p. 70. l. 14. marg. 56. 57. lib. 1. & 30. lib. 2. p. 72. l. 12. maior quam. p. 73. l. 13. mar. 33. 34. lib. 1. p. 78. l. 4. reddantur, & textus. p. 86. l. 17. applicetur que recta. p. 96. l. 7. super bipartitionem axis. p. 99. l. 11. ex vero P F minor quam D P. l. 44. legi 44. 45. in qua. p. 109. l. 20. dele postillam. p. 110. l. 31. marg. appone d. p. 111. l. 31. aut minor angulo. p. 129. l. 35. & inuertendo. ibidem marg. 10. huius. p. 130. l. 26. dele omnia ab O G vsq; ad comparando. p. 138. l. 8. opposita. p. 139. l. 18. mar. d. p. 141. l. 8. mar. 14. lib. 1. p. 146. l. 18. mar. 12. 13. lib. 1. p. 151. l. 18. mar. 8. & 11. addit. lib. 5. l. 19. M L, & R L. l. 22. æqualibus axium. p. 161. l. 13. ductam in hyperbola) p. 168. l. 30. quod est. p. 172. l. 29. sed in primo casu recta linea. l. 30. basim F I. ibid. puncta I, & F; nec F I secat bifariam subtensas G E, M K; propterea. p. 175. l. 26. mar. a. l. 35. ad duas. p. 176. l. 15. mar. d. p. 183. l. 1. mar. d. p. 189. l. 29. mar. lemma 7. l. 47. applicata. p. 190. l. 8. mar. prop. 2. præmis. p. 193. l. 6. XX. XXI. XXII. XXIII. XXIV. p. 196. l. 25. nempe X a. p. 197. l. 29. ad L P. p. 202. l. 23. mar. 18. huius. p. 207. l. 6. quod. l. 33. mar. a. p. 213. l. 11. hyperbolen E Z. p. 214. l. 38. mar. ex 20. huius. p. 217. l. 21. ideoque ei æqualis omnino erit. Simili ratiocinio ostendetur qualibet alia intercepta K L æquidistans. p. 223. l. 6. mar. Schol. prop. 6. addit. p. 228. l. 18. ergo comparando homologorum differentias. ibid. mar. lem. 3. lib. 1. p. 233. l. 4. mar. prop. 7. & ex 8. addit. p. 235. l. 37. hyperbolen H I K. p. 240. l. 3. mar. f. p. 244. l. 14. & I F R, seu H F N, & I F S. p. 248. l. 35. fit sectio. p. 250. l. 4. quod L O. p. 256. l. 12. parallela. p. 259. l. 12. quàm A C. p. 260. l. 16. per eundem. p. 262. l. 1. eandem. l. 4. A D, &. l. 41. & eam, quæ. p. 264. l. 13. secabit rectam. p. 268. l. 22. conus E A C. p. 269. l. 8. mar. ex prop. 5. lib. 1. l. 9. 10. 20. expunge recto. l. 15. sectionis F A G. p. 275. l. 10. rectangulo A D F. p. 280. l. 14. G E A eandem. p. 291. l. 3. XXIX. XXVII. p. 298. l. 6. XXIIX. XXVI. p. 303. l. 16. erectum. p. 306. l. 23. ad perfectionem prop. 26. p. 313. l. 7. mar. prop. 26. huius. p. 318. l. 25. quam G H E ad E H, & (quando G cadit inter E, & H), multo maiorem quàm G E. p. 319. l. 17. E H ab ipso quadrato G E. p. 321. l. 9. quadrato E G. l. 11. XXXV. XXXVI. p. 323. l. 2. diametri ad easdem partes. p. 325. l. 7. 21. & 23. (16. ex. 7.) p. 326. l. 31. quæ est dupla. l. 14. M E ad. l. 20. (16. ex 7.) p. 327. quàm D H A ad A H, & in primo casu multo maiorem, quàm. p. 328. l. 33. latus C O. p. 329. l. 22. quàm E D O in O E. p. 331. l. 27. vt axis transuersus A C; p. 335. l. 7. ipsius P R supra P Q. l. 11. aggregati M G, H E. p. 338. l. 18. G E, & E H. p. 341. l. 3. axis transuersi C A. p. 343. l. 9. mar. dele b. p. 344. l. 7. mar. b. p. 346. l. 15. mar. e. p. 347. l. 7. ad quadratum Q P R, &. p. 350. l. 13. O H, & G E. p. 356. l. 14. mar. lem. 15. p. 386. l. 31. mar. lib. 4. Coll. prop. 14. p. 391. l. 9. mar. lib. 4. Coll. prop. 13. p. 392. l. 15. quæ erit. p. 404. l. 37. A B E, A C E.

Errata in figuris.

Pag. 12. in eius figura deest recta N Q, & D terminus axis. pag. 22. fig. 1. deest recta I N. pag. 30. in parabola deest N in occursu B F, G H. pag. 37. deest P in puncto incidentiæ perpendicularis à puncto I super S K. pag. 46. deest A in vertice axis. pag. 93. deest recta L O. pag. 112. in tribus sequentibus figuris deest ramus I B. pag. 213. fig. 1. litteræ C, Q commutari debent. pag. 240. fig. 2. & pag. 246. producantur F L, H I ad K. pag. 268. fig. 2. linea curua A Z duci debet inter A G, & A D. pag. 368. fig. 3. in puncto I ponatur X.

